

# Mathematik 2 für MEB/MM

FB MME, HS Furtwangen University

Prof. Dr. Stefan von Weber

Skript 1694

Version Oktober 2018

<b>1</b>	<b>Vektorrechnung:</b> Darstellung von Vektoren, Komponenten, Einheitsvektor, Addition, Subtraktion, Projektion, Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Geraden, Ebenen	Seite 2
<b>2</b>	<b>Lineare Algebra:</b> Darstellung, Rechnen mit Matrizen und Vektoren, Drehmatrix, lineare Gleichungssysteme (Eliminationsverfahren GAUSS oder GAUSS-JORDAN, inverse Matrix, über- und unterbestimmte Systeme), Determinanten (Rang einer Matrix, SARRUSsche Regel, CRAMERsche Regel), Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	14
<b>3</b>	<b>Fourier-Reihen:</b> (Fourier-Reihe, reell, komplex, beliebige Periode, punktweise Funktion), Wellen (zeitliche und räumliche Ausbreitung von Wellen, Amplitude, Frequenz, Phase)	25
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen:</b> graphische Darstellung, skalare und Vektorfelder, partielle Ableitung, Differenzial, Gradient, Kettenregeln, Fehlerfortpflanzung	38
<b>5</b>	<b>Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen:</b> konstante Grenzen, Produktzerlegung, Koordinatensysteme, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Trägheitsmomente, variable Grenzen	51
<b>6</b>	<b>Gewöhnlichen Differentialgleichungen:</b> Klassifikation, Anfangswerte bzw. Randbedingungen, Trennung der Veränderlichen, Variation der Konstanten, DGL mit konstanten Koeffizienten, e-Ansatz, homogene, inhomogene DGL, charakteristische Gleichung, inhomogener Lösungen, Systeme linearer DGL	62
<b>7</b>	<b>Laplace-Transformation:</b> Eigenschaften, Lösung einer DGL, Korrespondenztabelle, Partialbruchzerlegung, Rücktransformation, Übertragungsfunktion	79
<b>8</b>	<b>Übungsbeispiele</b>	87
<b>9</b>	<b>Beispielklausur</b>	98
<b>10</b>	<b>Literatur</b>	100

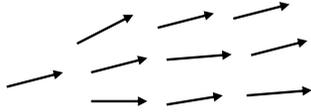
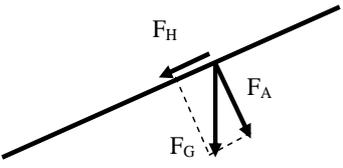
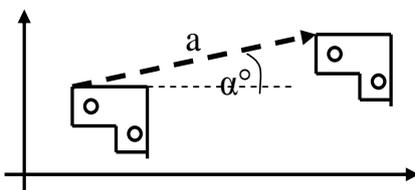
# 1. Vektorrechnung

Ein Vektor ist eine Größe bestehend aus Betrag und Richtung.

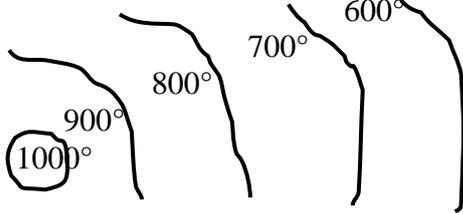
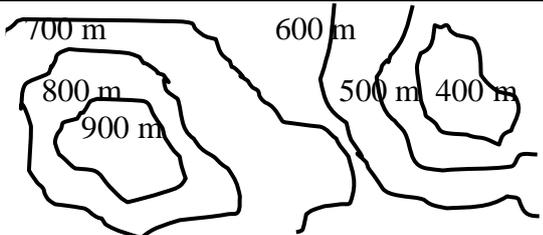
Ein Skalar (skalare Größe) dagegen hat nur einen Betrag, eventuell mit Vorzeichen.

**Ein Vektor ist unabhängig vom Startpunkt nur durch Betrag und Richtung definiert.**

Beispiele für Vektoren:

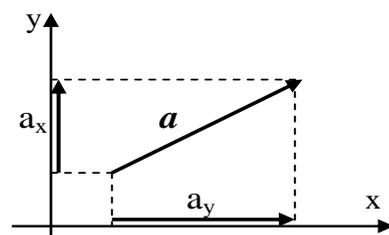
Strömungsfeld		Betrag in m/s Richtung $\alpha^\circ$
Kraftwirkung		Betrag in [N] Richtungen $F_G$ Schwerkraft $F_A$ Kraft auf Auflage $F_H$ Hangabtriebskraft
Verschiebung eines Konstruktionselements in einer Zeichensoftware mittels eines Vektors $\mathbf{a}$		Betrag in [mm] Richtung von $\mathbf{a}$ in $\alpha^\circ$

Beispiele für Skalare:

Temperaturfeld Temperatur an jedem Ort definiert		Wert in $^\circ\text{C}$
Höhenlinien einer Funktion oder einer Landkarte		Wert in [m]
Masse oder Konzentration		Wert in [Kg] oder in Prozent

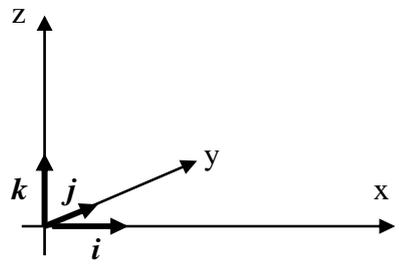
**Komponenten** sind Projektionen des Vektors auf die Koordinatenachsen.

Komponenten sind selbst Vektoren. Da sie aber nur in oder gegen Achsenrichtung zeigen können, reicht ein Vorzeichen ( $\pm$ ) zur Richtungsangabe aus. (Hier verschwimmt die saubere Trennung von Vektor und Skalar.)



**Darstellung eines Vektors** **graphisch:** als Pfeil mit Länge und Richtung  
**algebraisch:**  $P_1P_2 \quad \vec{a} \quad \mathbf{a}$   
**komponentenweise:**  $(a_x, a_y, a_z)'$  oder  $(a_x, a_y, a_z)^T$

Haben zwei Vektoren gleichen Betrag und gleiche Richtung, dann sind sie gleich. Weicht Richtung oder Betrag ab, sind sie ungleich.

<p>Der <b>Einheitsvektor</b> hat Betrag 1. (Statt Betrag kann man auch Länge oder Norm sagen).          Die Achseneinheitsvektoren <math>\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}</math> (bzw. <math>i, j, k</math>) zeigen in Richtung der Achsen x, y, z.          Korkenzieherregel: <math>k</math> zeigt in Bewegungsrichtung eines rechtshändigen Korkenziehers, dessen Griff man von <math>i</math> nach <math>j</math> dreht. (Bei Drehung <math>j</math> nach <math>k</math> in <math>i</math>-Richtung, bei Drehung <math>k</math> nach <math>i</math> in <math>j</math>-Richtung).</p>	
---	--

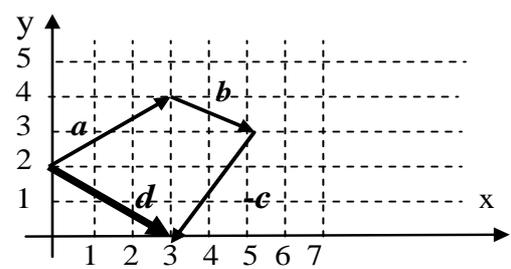
**Komponentenschreibweise** mit Achseneinheitsvektoren: Dabei geben die Komponenten  $a_x, a_y, a_z$  das Vorzeichen und den Betrag, die Achseneinheitsvektoren  $i, j, k$  die Richtung der Komponenten vor.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Der **Ortsvektor** ist ein Vektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt, z.B. Punkt  $P$ .  
 Beim **Nullvektor** sind alle Komponenten 0. Er hat Betrag 0 und keine Richtung.

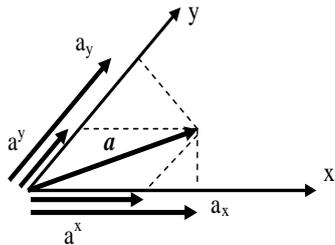
<p>Beim <b>Gegenvektor</b> <math>-\mathbf{a}</math> zum Vektor <math>\mathbf{a}</math> wechseln die Komponenten von <math>\mathbf{a}</math> ihr Vorzeichen. Vektor <math>-\mathbf{a}</math> zeigt genau entgegen der Richtung von <math>\mathbf{a}</math>. Die Beträge sind gleich.</p>	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ -1,3 \end{pmatrix} \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \\ 1,3 \end{pmatrix}$
---	--

**Vektoraddition** und **Vektorsubtraktion** komponentenweise und graphisch

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{d}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x - c_x \\ a_y + b_y - c_y \end{pmatrix}$ <p>Vektor <math>-\mathbf{c}</math> ist Gegenvektor von <math>\mathbf{c}</math>          Vektor <math>\mathbf{d}</math> ist der resultierende Vektor</p>	
---	--

**n-dimensionale Vektoren:** Vektoren dürfen beliebige Dimension n haben.

Ebene: 2-dimensional  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)'$   
 Raum: 3-dimensional  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)'$   
 Hyperraum: n-dimensional  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$  (Komponenten nummeriert)

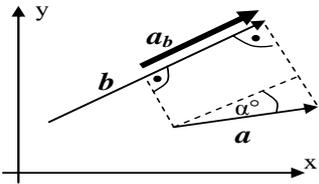
<p><b>Schiefwinklige Achsen</b>  kontravariante Komponenten  <math>a^x, a^y</math> (Projektion parallel zur anderen Achse)  kovariante Komponenten  <math>a_x, a_y</math> (Senkrechte Projektion auf die Achse)</p>		<p>Wo?  Kristalloptik  Kräfte in  texturiertem  Material, z.B.,  in gewalztem  Blech</p>
---	--	--

Für die kontravarianten Komponenten bleiben Regeln der Addition und Subtraktion erhalten.

**Kommutativgesetz** der Vektoraddition (Vertauschbarkeit):  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

**Assoziativgesetz** der Vektoraddition

(Reihenfolge der Additionen beliebig):  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

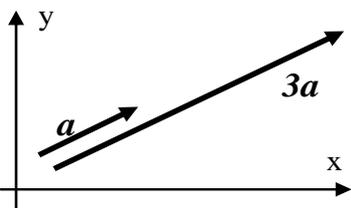
<p><b>Senkrechte Projektion</b> eines Vektors <math>\vec{a}</math> auf eine beliebige Richtung <math>\vec{b}</math>.</p> $ \vec{a}_b  =  \vec{a}  \cos(\alpha)$ <p><math>\alpha</math> ist der Winkel zwischen <math>\vec{a}</math> und <math>\vec{b}</math>.</p>	
---	---

Vektorkomponenten sind Projektionen des Vektors auf die Achsenrichtungen  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

$|\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cos(\alpha_x)$   $\alpha_x$  ist der Winkel zwischen Vektor  $\vec{a}$  und Achsenvektor  $\vec{i}$ .

$|\vec{a}_y| = |\vec{a}| \cos(\alpha_y)$   $\alpha_y$  ist der Winkel zwischen Vektor  $\vec{a}$  und Achsenvektor  $\vec{j}$ .

Die Zählung des Winkels  $\alpha$  ist beliebig (ob in Uhrzeigerichtung oder entgegen), da  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$  ist.

<p><b>Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar</b></p> $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad k\vec{a} = \begin{pmatrix} k a_x \\ k a_y \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 4\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$	
--	---

**Euklidische Norm** (Betrag, Länge) eines Vektors:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$  in der Ebene,  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$  im Raum

$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  im n-dimensionalen Raum

Beispiel:  $\vec{a} = (-3, 7, 2)$   $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 2^2} = 7,874$

Die Vorzeichen der Komponenten darf man wegen des Quadrierens auch weglassen.

**Berechnung eines Einheitsvektors  $\vec{e}_a$  in Richtung  $P_1P_2$ :**

Die Punkte sind:  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4,5 \end{pmatrix}$   $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

Zuerst den Vektor  $\vec{a}$  von  $P_1$  nach  $P_2$  bilden: 
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 1,5 - 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dann die Norm von  $\vec{a}$  berechnen: 
$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4,24$$

Einheitsvektors  $\vec{e}_a$  in Richtung  $\vec{a}$  ist 
$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x / |\vec{a}| \\ a_y / |\vec{a}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4,24 \\ -3/4,24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,71 \\ -0,71 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor  $\vec{e}_a$  hat die Länge 1, denn  $\sqrt{0,71^2 + (-0,71)^2} = 1$  (bis auf Rundungsfehler), und  $\vec{e}_a$  hat die Richtung von Vektor  $\vec{a}$ , da wir  $\vec{a}$  nur mit einem Skalar  $1/|\vec{a}|$  multipliziert haben.

**Das Skalarprodukt zweier Vektoren**  $k = \vec{a} \cdot \vec{b}$  (oft lässt man den Punkt weg).

Das Skalarprodukt  $k$  (auch **inneres Produkt**) ist ein Skalar (nur Betrag und Vorzeichen)

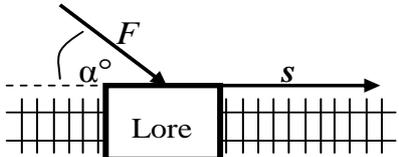
$k = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$   $\alpha$  ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

$k = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$  im Raum x, y, z und wenn die Komponenten gegeben sind.

$k = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  im n-dimensionalen Raum und gegebenen Komponenten.

Beispiel:  $\vec{a} = (7, -3, 4)$   $\vec{b} = (-2, 5, 8)$   $k = 7 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 3$

### Anwendungsbeispiele für das Skalarprodukt

1.) Arbeit = Kraft · Weg $E = \vec{F} \cdot \vec{s}$	
$\alpha=0^\circ$ $E =  \vec{F}  \cdot  \vec{s} $ Kraft und Weg parallel	
$\alpha=90^\circ$ $E=0$ Kraft und Weg senkrecht	

2.) Gesucht ist der Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Aus  $k = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$  folgt  $\cos(\alpha) = \frac{k}{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)}$   $\rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{k}{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)}\right)$ .

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$   $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$   $k = 3 \cdot 6 - 7 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 3$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-2)^2} = 7,874$

$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 4^2} = 7,280$

$\cos(\alpha) = \frac{3}{7,874 \cdot 7,280} = 0,05234$

$\alpha = \arccos(0,05234) = 87,0^\circ$

3.) Gesucht ist die Kraftkomponente  $F_u$  in einer vorgegebenen Richtung  $\vec{u}$ .

$F_u = \vec{F} \cdot \vec{e}_u = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{(|\vec{u}|)}$  Gegeben:  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$   $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt  $k = \vec{F} \cdot \vec{u} = 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 7 + 9 \cdot (-1) = -22$

Betrag  $\vec{u}$   $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 7^2 + (-1)^2} = 7,3485$

Kraftkomponente  $F_u$   $F_u = \frac{-22}{7,3485} = -2,994$

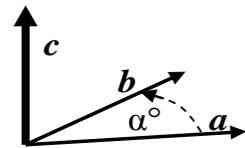
(Kraft  $\vec{F}$  wirkt hier mit 2,994 [N] entgegengesetzt zur u-Richtung).

**Das Vektorprodukt**  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  (auch **Kreuzprodukt** oder äußeres Produkt genannt)

Dieses Produkt ist nur im Raum definiert (3 Dimensionen). Es gibt zwei Berechnungsformeln, je nachdem wie die Vektoren gegeben sind.

1.)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\alpha)|$

Vektor  $\vec{c}$  steht senkrecht auf der Fläche, die von den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird. Vektor  $\vec{c}$  zeigt in die Bewegungsrichtung eines Korkenziehers, wenn  $\vec{a}$  auf kürzestem Weg nach  $\vec{b}$  gedreht wird.



2.) Wenn die Vektoren komponentenweise gegeben sind:

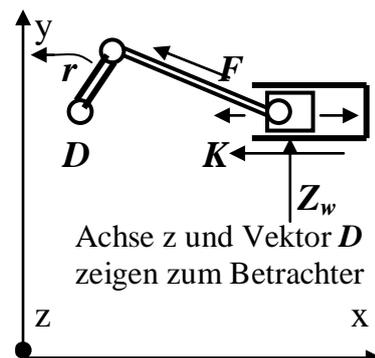
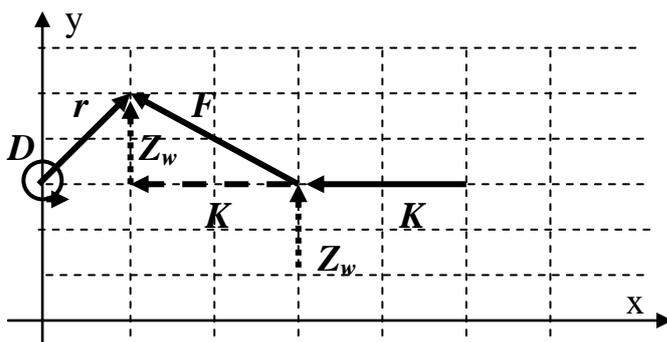
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Beispiel:  $\vec{a} = (7, -3, 4)$   $\vec{b} = (-2, 5, 8)$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 8 - 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot (-2) - 7 \cdot 8 \\ 7 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ 64 \\ 29 \end{pmatrix}$$

### Anwendungsbeispiele für das Vektorprodukt

**1.) Augenblickswert des Drehmoments einer Kurbelwelle:** An einer Kurbelwelle greift die Kolbenstange an. Hebelarm oder Kraftarm  $r$  ist die Höhe der Kröpfung der Kurbelwelle. Die expandierenden Gase im Zylinder drücken mit Kraft  $K$  auf den Kolben. Diese Kraft  $K$  wird von der Kolbenstange als Kraft  $F$  auf die Kurbelwelle übertragen. Dabei entsteht ein seitlicher Gegendruck auf die Zylinderwandung (Zwangskraft  $Z_w$ , die jedoch keine Arbeit leistet, da sie senkrecht zur Bewegungsrichtung steht). Aus dem Zusammenwirken von Kolbenstangenkraft  $F$  und Kraftarm  $r$  entsteht ein Drehmoment  $D$ , das die Ursache für die Drehbewegung der Kurbel ist. Das Drehmoment wird in [Nm] angegeben. Als Vektor steht  $D$  senkrecht auf der Ebene, die durch  $F$  und  $r$  gegeben ist.



$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	Augenblicksposition des Hebelarms der Kurbelwelle (Kröpfung)	$\vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	Augenblickswert der Kraft der Pleuelstange (Pleuel)
$\vec{K} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Augenblickswert der Kraft des Kolbens im Zylinder	$\vec{Z}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	Augenblickswert der setzlichen Zwangskraft des Zylinders auf den Kolben

Augenblickswert des Drehmoments  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} r_y F_z - r_z F_y \\ r_z F_x - r_x F_z \\ r_x F_y - r_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das Drehmoment beträgt 6 [Nm] und zeigt in positive z-Richtung (Rechtsdrehung in z-Richtung gesehen, wie ein Korkenzieher sich dreht, der in z-Richtung zeigt).

<p><b>2.) Konstruiere den Einheitsvektor <math>\vec{e}</math>, der senkrecht auf der Ebene <math>P_1, P_2, P_3</math> steht und nach außen zeigt, d.h. weg vom Koordinatenursprung:</b></p> <p><math>P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}</math>      <math>P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}</math>      <math>P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}</math></p>	
---	--

$$\vec{a} = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-1 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = P_1 P_3 = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{un} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-2) - (-3) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{Vektor noch unnormiert}$$

Normierung auf 1:  $\vec{e} = \frac{\vec{e}_{un}}{|\vec{e}_{un}|} = \frac{\vec{e}_{un}}{\sqrt{14^2 + 0^2 + 14^2}} = \frac{\vec{e}_{un}}{19,799}$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 14/19,799 \\ 0/19,799 \\ 14/19,799 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,707 \\ 0 \\ 0,707 \end{pmatrix}$$

<p>Jetzt geht es noch darum, ob der berechnete Einheitsvektor <math>\vec{e}</math> wegzeigt vom Koordinatenursprung, wie es gefordert war. In diesem Fall muss der Winkel zwischen einem beliebigen Ortsvektor <math>\vec{P}</math>, der vom Ursprung auf einen Punkt der Ebene zeigt, und dem berechneten Einheitsvektor <math>\vec{e}</math> kleiner <math>90^\circ</math> sein, oder <math>\cos(\alpha) &gt; 0</math>, oder das Skalarprodukt <math>k = \vec{P} \cdot \vec{e} &gt; 0</math>.</p>	
---	--

Ortsvektor  $P_1$  ist  $k = \vec{P}_1 \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7071 \\ 0 \\ 0,7071 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0,7071 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0,7071 = 4,2406 > 0$

Unser berechneter Vektor  $\vec{e}$  zeigt schon in die richtige Richtung. Andernfalls hätten wir den Gegenvektor  $-\vec{e}$  zu  $\vec{e}$  gebildet, d.h. jede seiner Komponenten mit  $-1$  multipliziert.

### Geradengleichungen in der Ebene

$y = a + bx$ <p>oder <math>bx - y = -a</math> wir dividieren durch <math>-a</math> und erhalten</p> $-\frac{b}{a}x + \frac{1}{a}y = 1 \quad (\text{nur für } a \text{ ungleich } 0)$ <p>oder <math>k_1x + k_2y = I</math> normierte <b>Koordinatendarstellung</b>  oder <math>y = y_0 + b(x - x_0)</math> <b>Taylor-Form</b> oder <b>Punktsteigungsform</b> im Entwicklungspunkt <math>(x_0, y_0)</math></p>	<b>Parameterdarstellung</b>	
--	-----------------------------	--

### Hessesche Normalform und Vektorform einer Geraden in der Ebene

$x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = d_0 \quad (\text{Hessesche Normalform})$ <p><math>\vec{n}_e</math> ist der Normaleneinheitsvektor senkrecht zur Geraden, <math>d_0</math> ist der kürzeste Abstand der Geraden zum Ursprung und hat dieselbe Richtung wie <math>\vec{n}_e</math>. <math>\alpha</math> ist der Winkel, den <math>\vec{n}_e</math> mit der x-Achse bildet. <math>P</math> ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden <math>y=a+bx</math>. Die Gerade schneidet die y-Achse bei <math>a</math>, die x-Achse bei <math>-a/b</math>.</p>	
--	--

Eine andere Schreibweise der Hesseschen Normalform ist  $\vec{P} \cdot \vec{n}_e = d_0$ . Das bedeutet, dass alle Punkte  $P$  auf der Geraden liegen, für die das Skalarprodukt von Ortsvektor  $\vec{P}$  und Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_e$  gerade den Wert  $d_0$  hat. Ein Einheitsvektor in der Ebene hat immer die Form  $\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ . Winkel  $\alpha$  gibt die Richtung an, während wegen

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$  die Länge von  $\vec{e}$  immer 1 ist. Mit  $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ergibt sich dann obige Form

$x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = d$ . Die Hessesche Normalform der Geraden gibt es nur in der Ebene.

**Die Vektorschreibweise** einer Geraden ist  $\vec{P} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{u} \cdot t$ . Dabei ist  $P$  ein beliebiger Punkt

auf der Geraden mit seinen Koordinaten  $x$  und  $y$ .  $P_0 = (x_0, y_0)$  ist ein Startpunkt, der auf der Geraden liegen muss. Vektor  $\vec{u}$  gibt die Richtung der Geraden für wachsende Werte des Parameters  $t$  an. Parameter  $t$  gibt an, wie weit man auf der Geraden in Längeneinheiten von Vektor  $\vec{u}$  vom Punkt  $P_0$  entfernt ist. Parameter  $t$  darf von  $-\infty$  bis  $\infty$  laufen.

Die Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen ergeben sich leicht aus der Parameterform  $y=a+bx$ . Setzen wir  $x=0$ , erhalten wir  $y=a$ . Setzen wir  $y=0$ , erhalten wir  $0=a+bx$  und daraus  $x=-a/b$ .

**Beispiele:**  $y = 0,7 - 0,3x$   
 $0,3x + 1 \cdot y = 0,7$

**Parameterform**  
**unnormierte Koordinatenform**

Wir setzen willkürlich  $x = 0,5$  und erhalten aus der Parameterform  $y = 0,7 - 0,3 \cdot 0,5 = 0,55$   
 Damit erhalten wir die **Taylorform**  $y = y_0 + b(x - x_0) = 0,55 - 0,3(x - 0,5)$

Wir suchen die **Vektorform**  $\vec{P} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{u} \cdot t$ .  $\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,55 \end{pmatrix}$   $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3 \end{pmatrix}$

Vektor  $\vec{u}$  zeigt an: geht man Strecke  $\Delta x = 1$  in x-Richtung, verändert sich y um  $\Delta y = -0,3$ .

Damit ist für das Beispiel die **Vektorform**  $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,55 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3 \end{pmatrix} t$ .

### Umwandlung Vektorform in Taylorform und Parameterform:

Die **Vektorform** besteht eigentlich aus zwei Gleichungen:  $x = 0,5 + 1 \cdot t$  und  $y = 0,55 - 0,3 \cdot t$ .  
 Wir lösen  $x = 0,5 + 1 \cdot t$  auf nach t  $\rightarrow t = x - 0,5$  Einsetzen in Gl.  $y = 0,55 - 0,3 \cdot t$   
 liefert  $y = 0,55 - 0,3(x - 0,5)$ . Das ist die **Taylorform** oder **Punktsteigungsform**.

Die **Parameterform** erhalten wir so:

Wir lösen die Klammer auf:  $y = 0,55 - 0,3x - 0,3 \cdot (-0,5)$  oder  $y = 0,7 - 0,3x$ .

**Umwandlung der Vektorform**  $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,55 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3 \end{pmatrix} t$  **in die Hessesche**

**Normalform**  $\vec{P} \cdot \vec{n}_e = d_0$ : Eine Drehmatrix  $D_z$  dreht Vektor  $\vec{u}$  um  $90^\circ$  (Normalenrichtung)

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{n}_{un} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-0,3) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-0,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (unnormierte Normale)}$$

Wir normieren den Normalenvektor: Zuerst Betrag berechnen  $|\vec{u}_{un}| = \sqrt{0,3^2 + 1^2} = 1,044$

Jetzt jede Komponente durch Betrag dividieren:  $\vec{n}_e = \begin{pmatrix} 0,3/1,044 \\ 1/1,044 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2874 \\ 0,9579 \end{pmatrix}$ .

Der kürzeste Abstand  $d_0$  der Geraden vom Ursprung ist  $d_0 = \vec{P} \cdot \vec{n}_e$ .

Als Punkt P auf der Geraden wählen wir der Einfachheit halber den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Dieser hat die Koordinaten  $x=0$  und  $y=0,7$ . (siehe oben) Damit wird der Abstand

$$d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2874 \\ 0,9579 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0,2874 + 0,7 \cdot 0,9579 = 0,6705$$

(Eine alternative Berechnung der unnormierten Normalen  $\vec{n}_{un}$  ist  $\vec{n}_{un} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , wobei

$k_1$  und  $k_2$  die Koeffizienten der unnormierten Koordinatendarstellung weiter oben sind.)

### Ausgleichsgerade nach Gauß

Gegeben sind n Messpunkte  $(x_i, y_i)$  mit den definierten x-Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und den fehlerbehafteten y-Koordinaten  $y_1, \dots, y_n$ .

Die Ausgleichsgerade lautet in der Parameterform  $y = a + bx$ .  $a$  ist der Achsenabschnitt auf der y-Achse, bei dem sich y-Achse und Gerade schneiden.  $b = \Delta y / \Delta x$  ist der Anstieg der Geraden, d.h. auf dem x-Abschnitt  $\Delta x$  verändert sich die Höhe y der Geraden um  $\Delta y$ . Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  werden nach der Methode der Kleinsten Quadrate von C. F. Gauß berechnet.

$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - n \bar{x} \bar{y}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - n \bar{x}^2}$ <p style="text-align: center;">(Formel für PC)                      (Formel für TR)</p> <p style="text-align: right;">Anstieg</p>	
$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \hat{y}_i = a + bx_i \quad e_i = y_i - \hat{y}_i$ <p>Absolutglied      Erwartungswert      Fehler</p>	

Dabei wird die Summe der Fehlerquadrate  $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$  zum Minimum. Die Ausgleichsgerade geht immer durch den Schwerpunkt der Daten mit den Koordinaten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$ , d.h. den Mittelwerten von  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_n$ . Die den einzelnen Messpunkten zugeordneten Punkte  $(x_i, \hat{y}_i)$  auf der Geraden heißen Erwartungswerte  $\hat{y}_i$ .

**Beispiel:** Gegeben sind 4 Messpunkte  $(x_i, y_i)$ :  $(0,3, 0,7), (0,5, 0,95), (0,7, 1,41), (1,2, 2,35)$ .  
Wir berechnen die beiden Mittelwerte:  $\bar{x} = (0,3 + 0,5 + 0,7 + 1,2) / 4 = 0,675$   
 $\bar{y} = (0,7 + 0,95 + 1,41 + 2,35) / 4 = 1,3525$

Wir berechnen die Produktsumme und die Quadratsumme:

$$\sum x_i y_i = 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,95 + 0,7 \cdot 1,41 + 1,2 \cdot 2,35 = 4,492$$

$$\sum x_i^2 = 0,3^2 + 0,5^2 + 0,7^2 + 1,2^2 = 2,27$$

Mit  $n=4$  ergeben sich die Koeffizienten  $b$  und  $a$  zu:

$$b = \frac{4,492 - 4 \cdot 0,675 \cdot 1,3525}{2,27 - 2,27^2} = 1,878 \quad a = 1,3525 - 1,878 \cdot 0,675 = 0,0848.$$

(Soll die Gerade aus theoretischen Gründen exakt durch den Koordinatenursprung gehen, dann setzt man  $a=0$  und in der Formel für  $b$  setzt man  $b = \sum x_i y_i / \sum x_i^2$ .)

**Zwei Punkte  $P_1=(x_1, y_1), P_2=(x_2, y_2)$  liefern eine Gerade  $y=a+bx$**

mit  $b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$                       und                       $a = y_1 - b x_1$

**Der Schnittpunkt zweier Gerader liefert einen Punkt.**

$y=a+bx$     sei Gerade 1

$y=c+dx$     sei Gerade 2

Wir subtrahieren die beiden Gleichungen und erhalten

$0=(a-c)+(b-d)x$                       Daraus folgt  $x = \frac{-(a-c)}{b-d} = \frac{c-a}{b-d}$ .

Mit  $y=a+bx$  berechnen wir das  $y$  zum  $x$  und haben somit den Schnittpunkt gefunden.

<p>Beispiel: <math>y=3+4x</math> <math>y=7-2x</math></p>	$x = \frac{7-3}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = 0,666$
<p><math>y=3+4 \cdot 0,666 = 5,666</math></p>	<p>Schnittpunkt ist <math>x=0,666</math> und <math>y=5,666</math></p>

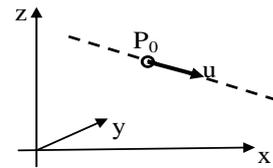
**Gerade im Raum  $x, y, z$**

Die einfachste Form ist die vektorielle Form

**Vektorielle Form:**

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \vec{u} \cdot t$$

Dabei ist  $P$  wieder ein Punkt auf der Geraden. Punkt  $P_0=(x_0, y_0, z_0)$  liegt ebenfalls auf der Geraden. Er fungiert

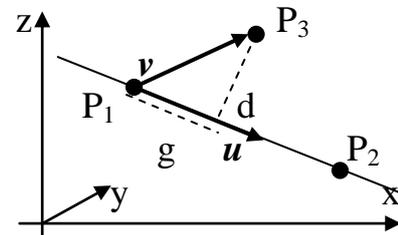


als Startpunkt. Vektor  $\vec{u}$  gibt wieder die Richtung der Geraden für wachsende Werte des Parameters  $t$  an. Parameter  $t$  gibt einfach an, wie weit man auf der Geraden in Längeneinheiten von Vektor  $\vec{u}$  vom Punkt  $P_0$  entfernt ist. Parameter  $t$  darf von  $-\infty$  bis  $\infty$  laufen.

Beispiel:  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_0 + \vec{u} t$  z.B.  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{pmatrix} t$ .

**Abstand eines Punkts von einer Geraden**

Eine Gerade gehe durch Punkt  $P_1$  in Richtung Punkt  $P_2$ . Punkt  $P_3$  liege irgendwo. Vektor  $\vec{u}$  zeigt die Richtung der Geraden. Vektor  $\vec{v}$  zeigt von  $P_1$  nach  $P_3$ . Wir fällen das Lot von  $P_3$  auf die Gerade. Der senkrechte Abstand sei  $d$ . Der Abstand des Fußpunkts des Lots von  $P_1$  sei  $g$ , und berechnet sich als Skalarprodukt von Vektor  $\vec{v}$  und



dem auf Länge 1 normierten Vektor  $\vec{u}$ . Die 3 Strecken  $g$ ,  $d$ , und  $v$  bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $v$ . Da  $g$  und  $v$  nun bekannt sind, können wir  $d$  nach Pythagoras berechnen. Der Betrag der Projektion von Vektor  $\vec{v}$  auf die Richtung von  $\vec{u}$  ist

$$g = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|} \quad \text{und Abstand des Punktes } P_3 \text{ von der Geraden } d = \sqrt{|\vec{v}|^2 - g^2}.$$

Beispiel:  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Damit ist  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$g = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = 0,577$$

Betrag  $v$  von Vektor  $\vec{v}$  ist  $v = |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} = 1,732$

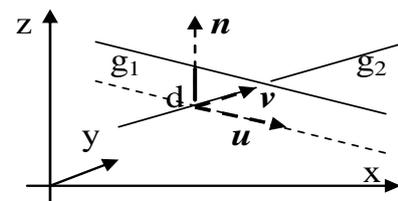
Abstand  $d$  des Punktes ist  $d = \sqrt{1,732^2 - 0,577^2} = 1,633$

**Abstand zweier windschiefer Geraden im Raum**

Gerade  $g_1$  sei  $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$  mit Parameter  $t$

Gerade  $g_2$  sei  $\vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$  mit Parameter  $s$

Vektor  $\vec{n}$  steht senkrecht auf der Ebene, die von den beiden Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aufgespannt wird.



Der Abstand der Geraden ist  $d = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ . Dabei ist die Differenz  $\vec{p} - \vec{q}$  ein Vektor, der von einem beliebig wählbaren Punkt  $P$  auf der Geraden  $g_1$  zu einem beliebig wählbaren Punkt

$Q$  auf der Geraden  $g_2$  zeigt. Das Skalarprodukt  $(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}$  liefert die Projektion des Differenzvektors auf den Normalenvektor  $\vec{n}$ . Dieser muss jedoch auf Länge 1 normiert sein, damit das Maß von  $d$  stimmt.

Beispiel:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  sei Gerade  $g_1$ .  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$  sei Gerade  $g_2$ .

Wir berechnen mittels Kreuzprodukt den unnormierten Normalenvektor auf der uv-Ebene.

$$\vec{n}_{un} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-3) - 1(-1) \\ 1 \cdot 3 - 1(-3) \\ 1(-1) - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Abstand } d = \frac{\left| \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2 + (-10)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}}{\sqrt{200}} = \frac{2(-8) + (-9)6 + 0(-10)}{\sqrt{200}} = 4,95$$

## Ebenen im Raum

$$z = a + bx + cy$$

$$k_1x + k_2y + k_3z = d$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{u}s + \vec{v}t$$

### Parameterdarstellung

### unnormierte Koordinatendarstellung

### Vektorielle Darstellung mit Stützvektor $\vec{P}_0$ , den beiden

Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}$ , die die Ebene aufspannen und den beiden Parametern  $s$  und  $t$ , die beliebige Werte annehmen dürfen. Zwei Vektoren ungleicher Richtung und mit Längen  $>0$  definieren eine Ebene

$$\vec{P} \cdot \vec{n}_e = d_0$$

**Hessesche Normalform.** Das bedeutet, dass alle Punkte  $P$  auf der Ebene liegen, für die das Skalarprodukt von Ortsvektor  $\vec{P}$  und Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_e$  gerade den Wert  $d_0$  hat.

### Drei Punkte nicht auf einer Geraden liegend definieren eine Ebene

Aus der Parameterdarstellung folgt für 3 Punkte  $P_1, P_2, P_3$  und ihren Koordinaten  $x_1, y_1, \dots, z_3$

$$1 \cdot a + x_1 \cdot b + y_1 \cdot c = z_1$$

$$1 \cdot a + x_2 \cdot b + y_2 \cdot c = z_2$$

$$1 \cdot a + x_3 \cdot b + y_3 \cdot c = z_3$$

Das sind 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten  $a, b, c$ .

So erhalten wir die Parameterdarstellung  $z = a + bx + cy$  der Ebene.

Aus  $z = a + bx + cy$  folgt die Koordinatendarstellung  $bx + cy - 1 \cdot z = -a$  oder  $k_1x + k_2y + k_3z = d$  mit  $k_1 = b, k_2 = c, k_3 = -1$  und  $d = -a$ . Aus den Koeffizienten  $k_1, k_2$ , und  $k_3$  gewinnen wir sofort den noch unnormierten Normalenvektor  $\vec{n}_{un}$ , der senkrecht auf der Ebene steht:

$$\vec{n}_{un} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Wir können ihn nach der üblichen Methode auf Länge 1 normieren.

**Beispiel:**  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$   $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Gleichungssystem ist  $3 = 1 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c$   
 $2 = 1 \cdot a + 2 \cdot b + 5 \cdot c$   
 $4 = 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c$

Wir lösen das Gleichungssystem mit TR, Excel oder MatLab und erhalten die Werte der 3 Unbekannten a, b, c: a=3, b=2, c=-1. Damit ist die **Parameterform**  $z = 3 + 2x - 1y$ .

Daraus folgt die **Koordinatendarstellung**  $-2x + 1y + 1z = 3$ . Unsere unnormierte Flächennormale ist  $\vec{n}_{un} = (-2, 1, 1)^T$ . Die Norm ist  $|\vec{n}_{un}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6} = 2,449$ .

Wir normieren Vektor  $\vec{n}_{un}$ , indem wir jede Komponente durch 2,449 dividieren und erhalten den Flächennormaleneinheitsvektor:  $\vec{n}_e = (-0,816, 0,408, 0,408)^T$ . Wir berechnen den kleinsten Abstand  $d_0$  der Fläche vom Ursprung, indem wir das Skalarprodukt unserer normierten Flächennormalen mit dem Ortsvektor eines beliebigen Punktes, der auf der Ebene liegt, bilden. Wir wählen Punkt  $P_1$ :

$$d_0 = \vec{n}_e \cdot \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -0,816 \\ 0,408 \\ 0,408 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -0,816 \cdot 1 + 0,408 \cdot 2 + 0,408 \cdot 3 = 1,224$$

Damit haben wir die Werte der **Hesseschen Normalform** dieser Ebene beisammen:  $d_0$  und  $\vec{n}_e$ .

#### Abstand $d_q$ eines Punktes $Q$ von einer Ebene

Abstand  $d_q$  berechnet sich zu  $d_q = \vec{n}_e \cdot \vec{q} - d_0$ .

Dabei sind  $d_0$  und  $\vec{n}_e$  die Parameter der Hesseschen Normalform der Ebene.

**Beispiel:** Wir benutzen dieselbe Ebene wie im vorangehenden Beispiel. Der Punkt Q außerhalb der Ebene habe die Koordinaten  $x = 4, y = 7,5, z = 6$ .

Abstand  $d_q$  berechnet sich dann zu

$$d_q = \begin{pmatrix} -0,816 \\ 0,408 \\ 0,408 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7,5 \\ 6 \end{pmatrix} - d_0 = -0,816 \cdot 4 + 0,408 \cdot 7,5 + 0,408 \cdot 6 - 1,224 = 1,02$$

#### Wenn zwei Ebenen sich schneiden, entsteht eine Gerade:

$z = a + bx + cy$  sei Ebene 1 in Parameterdarstellung

$z = d + ex + fy$  sei Ebene 2 in Parameterdarstellung.

Wir subtrahieren

$$0 = (a-d) + (b-e)x + (c-f)y \quad \text{oder} \quad (f-c)y = (a-d) + (c-f)x$$

oder  $y = \left( \frac{a-d}{f-c} \right) + \left( \frac{b-e}{f-c} \right)x$  Wir benennen die Klammern um

$y = b_0 + b_1 x$  Das ist eine Geradengleichung

#### Wenn drei Ebenen sich schneiden, entsteht ein Punkt:

$z = a_1 + b_1 x + c_1 y$

sei Ebene 1 in Parameterdarstellung

$z = a_2 + b_2 x + c_2 y$

sei Ebene 2 in Parameterdarstellung

$$z = a_3 + b_3 x + c_3 y$$

sei Ebene 3 in Parameterdarstellung

Das sind 3 Gleichungen für die 3 unbekanntes  $x, y, z$ . Bei gegebenen Koeffizienten  $b_1, b_2, \dots, c_3$  und gegebenen Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  lösen wir das Gleichungssystem und erhalten die Koordinaten  $x, y, z$  des Schnittpunkts.

## 2. Lineare Algebra

### 2.1 Einführung

Eine erste Einführung in die Vektorrechnung erfolgte bereits im Abschnitt 1.

Als **n-Vektor** bezeichnet man die Form  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Statt  $\vec{a}^T$  wird auch oft nur  $\vec{a}'$  geschrieben. Beispiel eines 3-dimensionalen Vektors, z.B. eine

Beschleunigung im Raum, ist  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -2.4 \\ 1.7 \end{pmatrix}$

Eine **(m,n)-Matrix** hat m Zeilen und n Spalten, z.B.  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,

z.B. eine (2,3)-Matrix  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Eine **Spaltenmatrix** hat nur eine Spalte, eine **Zeilenmatrix** nur eine Zeile, z.B.

(m,1)-Spaltenmatrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$  oder (1,n)-Zeilenmatrix  $A = (a_{11} \dots a_{1n})$ .

**Quadratische Matrizen** haben gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, z.B. eine (n, n)-Matrix. Dreiecksmatrizen, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind immer quadratisch.

Bei **Dreiecksmatrizen** ist eine Hälfte über oder unter der Diagonalen mit Nullen belegt,

wie z.B. bei der oberen (n,n)-Dreiecksmatrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ .

Eine **Diagonalmatrix** ist außerhalb der Diagonalen mit Nullen belegt, wie z.B. die

(n,n)-Diagonalmatrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & a_{..} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ .

Eine **Einheitsmatrix** ist eine Diagonalmatrix mit der Diagonalen 1, z.B.  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Eine **Nullmatrix** ist eine beliebige (m, n)-Matrix aus Nullen, z.B.  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Symmetrische und antisymmetrische Matrizen** sind wieder quadratische Matrizen. Bei symmetrischen Matrizen gilt  $A_s = A_s^T$ , d.h. eine symmetrische Matrix  $A_s$  ist gleich ihrer **Transponierten** (Zeilen und Spalten vertauscht).

Bei antisymmetrischen Matrizen gilt  $A_{as} = -A_{as}^T$ , d.h. Matrix  $A_{as}$  ist gleich ihrer negativen Transponierten (Zeilen und Spalten vertauscht). Hier ist die Diagonale zwangsweise Null.

Beispiel symmetrisch  $A_s = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 3 & -2 \\ 9 & 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ , antisymm.  $A_{as} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -4 & -7 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \\ 9 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

**Satz:** Jede quadratische Matrix ist zerlegbar in die Summe aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix.

Es gilt  $A = A_s + A_{as}$  mit  $A_s = 0.5 * (A + A^T)$  und  $A_{as} = 0.5 * (A - A^T)$ .

Jede beliebige Matrix lässt sich transponieren, d.h. Zeilen und Spalten vertauschen. Dabei wird aus einer (m, n)-Matrix eine (n, m)-Matrix.

Beispiel  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  wird zu  $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 1 & 9 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Orthogonale Matrizen** bestehen aus Zeilenvektoren, die im n-dimensionalen Raum jeweils senkrecht aufeinander stehen. Diese Matrizen sind immer quadratisch. Für orthogonale Matrizen gilt  $A A^T = A^T A = D$  (Matrix mal Transponierte ergibt Diagonalmatrix).

Sind die Zeilenvektoren auf Norm 1 normiert, spricht man von orthonormalen Matrizen. Hier gilt  $A A^T = A^T A = E$

**Inverse Matrizen**  $A^{-1}$  sind aufwändig zu berechnen, vergleichbar der Lösung eines Gleichungssystems. Wir berechnen Sie nur für quadratische Matrizen.

Es gilt  $A A^{-1} = E = A^{-1} A$ , d.h. Matrix mal Inverse ergibt die Einheitsmatrix.

## 2.2 Rechnen mit Matrizen und Vektoren

**Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:** Jedes Element wird multipliziert.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{mal 3 gibt} \quad 3A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 27 & 18 \end{pmatrix}$$

**Addition und Subtraktion von Matrizen** ist nur möglich, wenn beide Matrizen gleiche Zeilenzahl und gleiche Spaltenzahl haben. Es werden immer die gleich indizierten Elemente addiert bzw. subtrahiert.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**Multiplikation Matrix mal Vektor:** Hier ist eine Verkettung nötig. Liegt eine (m,n)-Matrix vor, dann kann diese nur mit einem n-Vektor multipliziert werden. Es entsteht als Ergebnis ein m-Vektor. Das i-te Element des m-Ergebnisvektors ist das Skalarprodukt der i-ten Matrixzeile mit dem n-Vektor.

$$A\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 4 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 6 \cdot 4 - 0 \cdot 1 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 51 \end{pmatrix}$$

**Multiplikation Matrix mal Matrix:** Hier ist wieder eine Verkettung nötig. Liegt eine (m,n)-Matrix vor, kann sie nur mit einer (n,p)-Matrix multipliziert werden. Das Ergebnis ist eine (m,p)-Matrix. Das Skalarprodukt aus i-ter Zeile der (m,n)-Matrix und j-ter Spalte der (n,p)-Matrix ergibt das Element (i,j) der (m,p)-Ergebnismatrix.

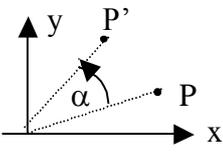
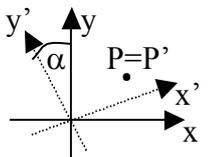
Beispiel: (2,3)-Matrix \* (3,3)-Matrix = (2,3)-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 38 & -14 \\ 92 & -3 & 64 \end{pmatrix}$$

**Drehmatrix** als Beispiel einer Matrixanwendung. Die folgende Matrix dreht einen Punkt P von seiner Position in die neue Position P'. Die Drehachse ist hier die z-Achse. Der Drehwinkel sei  $\alpha$ . Die z-Koordinate des Punktes wird bei dieser Drehung nicht geändert.

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{z.B. bei } \alpha=30^\circ \quad \text{ist} \quad D_z = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

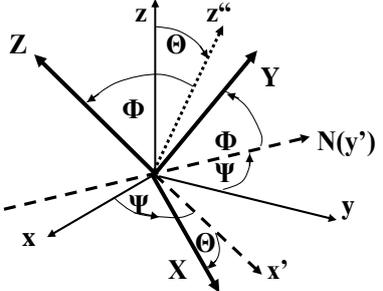
$$\text{Mit } \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad \vec{P}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = D_z \vec{P} = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.665 \\ 2.116 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Drehung des Punktes erfolgt in die vorzeichenrichtige mathematische Drehrichtung gemäß dem Winkel, z.B. +30°	Will man dagegen das Koordinatensystem drehen, d.h. neue Achsen $x'$ und $y'$ einführen, dann entspricht das der entgegengesetzten Drehung, z.B. -30°. Der Punkt bleibt am alten Ort, hat aber neue Koordinaten ( $x'$ , $y'$ )
	

**$D_x$  und  $D_y$**  sind die Drehmatrizen mit der Drehachse  $x$  bzw. Drehachse  $y$ :

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad D_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

**Eulersche Winkel  $\Psi$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$**  (sprich Psi, Teta, Phi) und Drehung um eine schiefe Achse:

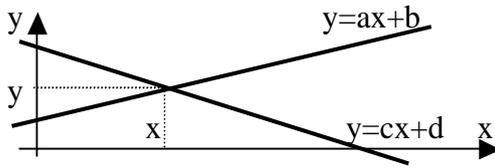
Feststehendes Koordinatensystem ist $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ Sich drehendes Koordinatensystem ist $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ Winkel $\Psi$ heißt Gierwinkel (wie Gieren) Winkel $\Theta$ heißt Nickwinkel (wie Nicken) Winkel $\Phi$ heißt Rollwinkel (wie Rollen) Drehung um Winkel $\Psi$ um Achse $\mathbf{z}$ liefert $\mathbf{N}(y')$ und $x'$ Drehung um Winkel $\Theta$ um Achse $\mathbf{N}(y')$ liefert $\mathbf{X}$ und $\mathbf{z}''$ Drehung um Winkel $\Phi$ um Rollachse $\mathbf{X}$ liefert $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$	
--	--

Die 3x3-Drehmatrix ist  $M_{GNR}$ . Achse  $\mathbf{X}$  ist die schiefe Drehachse (Rollachse) zum Winkel  $\Phi$ .

$$M_{GNR} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Ein rotierender Propeller sollte sich um die  $z$ -Achse drehen (Winkel  $\Psi$  benutzen).

### 2.3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe sei es, den Schnittpunkt $(x, y)$ zweier Geraden zu berechnen. Wir haben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten: $y = a x + b$ $y = c x + d$	
---	--

Wir schreiben die Gleichungen in 2 Schritten um in Richtung Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} -a x + 1 \cdot y &= b \\ -c x + 1 \cdot y &= d \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad A \vec{x} = \vec{b}$$

- A ist die Matrix der Koeffizienten
- $\vec{x}$  ist der Lösungsvektor (hier im Beispiel (x, y))
- $\vec{b}$  ist der Vektor der Rechten Seite (hier im Beispiel (b, d))

Zur Erinnerung

Eine gültige Gleichung bleibt eine gültige Gleichung, auch wenn man

- linke und rechte Seite mit derselben Größe multipliziert oder dividiert
- zur linken und rechten Seite dieselbe Größe addiert oder subtrahiert
- ein beliebig Vielfaches anderer Gleichungen addiert oder subtrahiert

Beispiele

$$a x + b y = c \quad \text{mit } 4 \text{ multipliziert gibt} \quad 4 a x + 4 b y = 4 c$$

$$\begin{aligned} a x + b y &= c \\ d x + e y &= f \end{aligned} \quad \text{ergeben addiert die neue Gleichung} \quad (a+d) x + (b+e) y = (c+f)$$

### 2.3.1 Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $A \vec{x} = \vec{b}$

Durch Multiplikation mit bestimmten Zahlen sowie Addition bzw. Subtraktion von Zeilen wandelt man die ursprüngliche Koeffizientenmatrix A in die Einheitsmatrix E um.

Der Vektor  $\vec{b}$  der Rechten Seite wird mitgewandelt und wird zur Lösung  $\vec{x}$ , denn es gilt ja

$$E \vec{x} = \vec{x}$$

Zahlenbeispiel zur Gauß-Jordan-Elimination: Gegeben sind drei Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\begin{aligned} 6 x_1 - 12 x_2 + 6 x_3 &= 6 \\ 3 x_1 - 5 x_2 + 5 x_3 &= 13 \\ 2 x_1 - 6 x_2 &= -10 \end{aligned}$$

Im ersten Umrechnungsschritt werden in der ersten Matrixspalte unter dem Pivotelement [6] zwei Nullen erzeugt, indem die 1. Gleichung (1. Gl.) mit einem geeigneten Faktor multipliziert von der 2. Gl. und der 3. Gl. subtrahiert wird. Die Faktoren *Fak* ergeben sich auf simple Weise aus Matricelement / Pivot, wobei das Matricelement dasjenige unter dem oder über dem Pivotelement ist, das gerade zu Null gemacht werden soll. Zuletzt wird die Pivotzeile durch das Pivotelement geteilt, damit auf der Diagonalen eine 1 entsteht. Die durchzuführenden Aktionen sind rechts neben dem Gleichungssystem noch einmal in Kurzform notiert. (*Dividiert man die Pivotzeile zuerst durch den Pivot, dann sind die Faktoren Fak gleich den Matricelementen, die man zu Null machen will.*)

$$\begin{pmatrix} [6] & -12 & 6 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 3.) \quad 1. Gl. := 1. Gl. / 6 \\ 1.) \quad Fak = 3 / 6; \quad 2. Gl. := 2. Gl. - Fak \cdot 1. Gl. \\ 2.) \quad Fak = 2 / 6; \quad 3. Gl. := 3. Gl. - Fak \cdot 1. Gl. \end{array}$$



Da der erste Lösungsvektor die erste Spalte der inversen Matrix wird, bezeichnen wir seine Elemente mit  $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ , die vom zweiten Lösungsvektor mit  $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$ , usw.

**Hat man viele Gleichungssysteme mit derselben Matrix  $A$ ,** aber unterschiedlichen Rechten Seiten  $\vec{b}$  zu lösen, dann berechnet man einmalig die inverse Matrix  $A^{-1}$ . Die Lösung eines der vielen Gleichungssysteme ist dann nur noch die relativ schnelle Operation „Matrix mal Vektor“, denn es gilt:

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

Genau diese Aufgabenkonstellation findet man beim Glätten von Messkurven mit dem Verfahren der „gleitenden Polynome“ vor, denn da muss für jeden neuen Messwert ein Gleichungssystem gelöst werden.

### 2.3.3 Tücken beim Lösen linearer Gleichungssysteme

**Merksatz:** *Lässt sich ein Gleichungssystem nicht lösen, dann ist in 99,9% der Fälle schon die Aufgabenstellung oder die zu Grunde liegende Konstruktion falsch.*

**Lineare Abhängigkeit** einer Matrixzeile liegt vor, wenn sich diese als **Linearkombination** aus anderen Zeilen darstellen lässt. Im folgenden Beispiel lässt sich z.B. die 3. Zeile durch eine Linearkombination aus der 1. und 2. Zeile der Matrix darstellen.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 5 & -4 & -3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad 3. \text{ Zeile} = 0,5 \cdot 1. \text{ Zeile} - 1,5 \cdot 2. \text{ Zeile}$$

Eine Matrix heißt **singulär**, wenn sie linear abhängige Zeilen enthält.

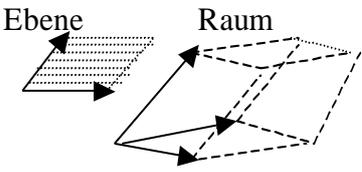
Eine Matrix heißt **quasisingulär**, wenn sie fast linear abhängige Zeilen enthält.

**Merksatz:** *Singuläre oder quasisinguläre Matrizen sind die Folge einer falschen oder überfrachteten Problemstellung. Höhere Rechengenauigkeit nützt nichts.*

Wie erkennt der Laie schlecht konditionierte Matrizen bzw. Gleichungssysteme?

- Bei einem Gleichungssystem ändert man auf der Rechten Seite bei irgendeiner Zahl die 3. oder 4. Kommastelle (z.B. aus 3.145 eine 3.146 machen). Ändert sich die berechnete Lösung darauf hin brutal, dann liegt schlechte Kondition vor.
- Bei einer Matrix berechnet man die Inverse. Dann ändert man eine Kommastelle und berechnet die Inverse der Inversen. Das müsste die Ausgangsmatrix ergeben. Kommen brutal andere Werte heraus, dann ist die Matrix schlecht konditioniert (quasisingulär).

## 2.4 Determinanten

	<p>Die Determinante („Bestimmende“) einer quadratischen Matrix ist geometrisch das von den Zeilenvektoren aufgespannte Volumen. Je dichter die Zeilenvektoren zusammenfallen, desto kleiner ist die Determinante. Ihren maximalen Wert hat sie, wenn die Zeilenvektoren senkrecht aufeinander stehen.</p>
---	---

**Berechnung von Determinanten** bei  $n=2$  bzw.  $n=3$  nach Sarrus ( **Sarrus'sche Regel**)  
(Der französische Mathematiker Pierre-Frédéric Sarrus lebte von 1798 bis 1861)

$$n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad D_A = |A| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$n=3 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$	$D_A =  A  = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} +$ $a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} -$ $a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$
--	---

(Die 3 positiven Terme folgen den abfallenden Linien , die 3 negativen Terme den ansteigenden Linien).

Ab  $n = 4$  sollte man nicht mehr die Sarrus'sche Regel verwenden, denn die wird dann eklig kompliziert. Excel z.B. macht intern aus der Matrix eine Dreiecksmatrix wie beim Gauß-Eliminationsverfahren und multipliziert einfach die Pivotelemente. Das Produkt ist die Determinante:

$$D = |A| = \prod_{i=1}^n P_i$$

**2.4.1 Die Cramer'sche Regel zur Lösung kleiner Gleichungssysteme für  $n=2$  bzw.  $n=3$**   
(Der Schweizer Mathematiker Gabriel Cramer lebte von 1704 bis 1752)

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad x_k = \frac{\text{Det } A^k}{\text{Det } A} \quad A^k \text{ entsteht aus } A, \text{ indem man die } k\text{-te Spalte von } A \text{ durch die Rechte Seite } \vec{b} \text{ ersetzt}$$

Zahlenbeispiel für  $n=2$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 &= 5 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \text{oder als Matrixgleichung} \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 2 - 2 \cdot (-7)}{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7)} = \frac{24}{34} = 0,706 \quad (\text{erste Spalte der Matrix ersetzt})$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 5}{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7)} = \frac{-14}{34} = -0,412 \quad (\text{zweite Spalte der Matrix ersetzt})$$

Probe:  $3 \cdot 0,706 - 7 \cdot (-0,412) = 5,002$   
 $4 \cdot 0,706 + 2 \cdot (-0,412) = 2,000$  Probe O.K.

**Sehr große Gleichungssysteme löst man iterativ** nach Gauß, nach Seidel oder nach Jordan, um nur einige Verfahren zu nennen. Wann benutzt man etwa welche Methode?

n=2, dann Cramer'sche Regel oder Einsetzungsverfahren

n=3 bis n=1000, dann Gauß- oder Gauß-Jordan-Elimination

n>1000, dann iterative Verfahren nach Gauß, nach Seidel oder nach Jacobi

## 2.4.2 Beispiel Vereinfachte Spektrometerauswertung

Lösungen von je 1 Mol/l der 3 Stoffe A, B, C geben im Absorptionsspektrometer folgende bereits logarithmierte Skaleneinheiten:

Wellenlänge	420 nm	A=132	B=36	C=48
	450 nm	A=84	B=92	C=17
	480 nm	A=29	B=81	C=57

Ein Prozess liefert A, B, C gemischt in wässriger Lösung. Eine Interaktion bei der Absorption findet nicht statt. Eine Messung der Lösung liefert bei

Wellenlänge	420 nm	$I_1 = 111,1$	Skaleneinheiten
	450 nm	$I_2 = 97,1$	Skaleneinheiten
	480 nm	$I_3 = 57,8$	Skaleneinheiten

Mit welchen Molzahlen ist welcher Stoff vertreten? Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} 132 A + 36 B + 48 C &= 111,1 \\ 84 A + 92 B + 17 C &= 97,1 \\ 29 A + 81 B + 57 C &= 57,8 \end{aligned}$$

Die Cramer'sche Regel für n=3 ergibt die 4 Determinanten. Die aus der rechten Seite eingesetzten Matrixelemente sind fett dargestellt:

$$\begin{aligned} D &= 132 \cdot 92 \cdot 57 + 36 \cdot 17 \cdot 29 + 48 \cdot 84 \cdot 81 \\ &\quad - 29 \cdot 92 \cdot 48 - 81 \cdot 17 \cdot 132 - 57 \cdot 84 \cdot 36 = 554\,352 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_A &= \mathbf{111,1} \cdot 92 \cdot 57 + 36 \cdot 17 \cdot \mathbf{57,8} + 48 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 81 \\ &\quad - \mathbf{57,8} \cdot 92 \cdot 48 - 81 \cdot 17 \cdot \mathbf{111,1} - 57 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 36 = 388\,028 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_B &= 132 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 57 + \mathbf{111,1} \cdot 17 \cdot 29 + 48 \cdot 84 \cdot \mathbf{57,8} \\ &\quad - 29 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 48 - \mathbf{57,8} \cdot 17 \cdot 132 - 57 \cdot 84 \cdot \mathbf{111,1} = 221\,589 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_C &= 132 \cdot 92 \cdot \mathbf{57,8} + 36 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 29 + \mathbf{111,1} \cdot 84 \cdot 81 \\ &\quad - 29 \cdot 92 \cdot \mathbf{111,1} - 81 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 132 - \mathbf{57,8} \cdot 84 \cdot 36 = 49\,825 \end{aligned}$$

Durch Division der Determinanten erhalten wir die Lösungen:

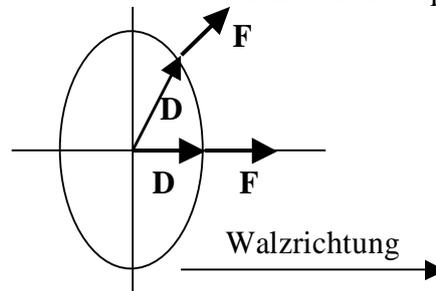
Molkonzentration	$A = D_A / D = 0,6999$	gerundet	0,70
	$B = D_B / D = 0,3997$	gerundet	0,40
	$C = D_C / D = 0,0899$	gerundet	0,09

Probe mit der 1. Gleichung:  $132 \cdot 0,70 + 36 \cdot 0,40 + 48 \cdot 0,09 = 111,12$  O.K.

## 2.5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

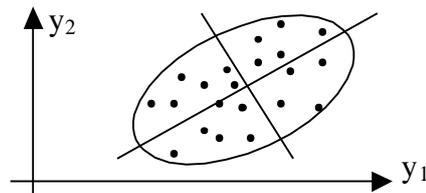
Eigenwerte spielen u.a. in folgenden Wissensgebieten eine Rolle:

**Elastizitätslehre:** Anisotropes Material, z.B. gewalzter Stahl, hat die Eigenschaft, dass Dehnung  $\mathbf{D}$  und Kraft  $\mathbf{F}$  nur auf den Achsen des Dilatationsellipsoids gleiche Richtung haben.



In der **Kristalloptik** ist die Lichtgeschwindigkeit abhängig von der Richtung im Kristall. Elektrische Feldstärke und dielektrische Verschiebung haben nur auf den Achsen des Fresnel'schen Ellipsoids gleiche Richtung.

In der **mathematischen Statistik** haben die Achsen des Korrelationsellipsoids die Richtung der Eigenvektoren der Kovarianzmatrix. In der Abbildung sind die Punkte Objekte (Probanden, Patienten), die durch Matrixzeilen (Patientendaten  $y_1, y_2, \dots$ ) repräsentiert werden.



Eine symmetrische quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  hat reelle Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander. Bei Multiplikation der Eigenvektoren mit  $\mathbf{A}$  ändern sie nicht ihre Richtung, sondern allenfalls ihre Länge. Die **Eigenwertgleichung** lautet:

$$\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$\mathbf{A}$  ist die quadratische symmetrische Matrix

$\vec{x}$  ist einer der  $n$  Eigenvektoren

$\lambda$  ist der zum Eigenvektor zugehörige Eigenwert

Die Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ist z.B. mit dem **Charakteristischen Polynom** der Matrix möglich:

$$P(\lambda) = \text{Det}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Bei  $n=2$  ist

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12}$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Klammern und einer kleinen Umordnung entsteht hier eine quadratische Gleichung, deren Lösungen man mit der p-q-Formel oder der Mitternachtsformel finden kann. Die beiden Lösungen sind die gesuchten Eigenwerte.

### Zahlenbeispiel aus der Mathematischen Statistik

Die p-dimensionale vektorielle Größe  $y' = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  heißt normalverteilt, wenn die Dichte die folgende Form hat (zur Erinnerung: das Apostroph heißt hier *transponiert*, d.h. Zeile statt Spalte) :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p} \sqrt{|\Sigma|}} e^{-(1/2)(y-\mu)' \Sigma^{-1} (y-\mu)}$$

$\mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  ist der Vektor der p Mittelwerte der p Datenspalten der (n, p)-Datenmatrix. mit n Zeilen zu n Probanden oder Patienten.

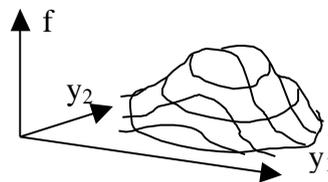
Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die **Kovarianzmatrix**  $\Sigma$  hier nur für p=2 dargestellt. Die Erweiterung auf höhere p-Werte lässt sich leicht ableiten.

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} \Sigma(y_{1i} - \bar{y}_1)^2 & \Sigma(y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2) \\ \Sigma(y_{2i} - \bar{y}_2)(y_{1i} - \bar{y}_1) & \Sigma(y_{2i} - \bar{y}_2)^2 \end{pmatrix}$$

Jede Summation  $\Sigma$  in der Matrix erfolgt über alle n Patienten ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Leider ist hier die Matrixbezeichnung und das Summenzeichen identisch, sorry!

$|\Sigma|$  in der Dichtefunktion  $f(y_1, y_2, \dots, y_p)$  ist die Determinante der Kovarianzmatrix  $\Sigma$ .

Die Dichtefunktion ist im 2-dimensionalen Fall (p=2) ein Berg mit elliptischen Höhenlinien. Die meisten Patientendaten liegen beim Durchschnitt (Mittelwert). Nach außen werden es weniger.



Dr. Gmyrek aus Berlin hat 20 Neugeborene gewogen und gemessen. Das Gewicht ist  $y_1$ , die Länge ist  $y_2$ . Die Mittelwerte und die Kovarianzmatrix sind:

Mittelwertvektor  
(Schätzung von  $\mu$ )  $\bar{y} = \begin{pmatrix} 3,509 \\ 51,5 \end{pmatrix} \begin{matrix} Kg \\ cm \end{matrix}$

Kovarianzmatrix  
(Schätzung von  $\Sigma$ )  $S = \begin{pmatrix} 0,2137 & 0,823 \\ 0,823 & 4,89 \end{pmatrix}$

Das Charakteristische Polynom ist  $P(\lambda) = (0,2137 - \lambda)(4,89 - \lambda) - 0,823^2$   
oder  $\lambda^2 - 5,1037\lambda + 0,3676$

Die Wurzeln sind  $\lambda_1 = 5,0308$  und  $\lambda_2 = 0,0730$

Die zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$  und  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$  erhält man aus der Eigenwertgleichung  $A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0,2317 & 0,823 \\ 0,823 & 4,89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = 5,0306 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_1$$

d.h.  $0,2137 x_{11} + 0,823 x_{21} = 5,0306 x_{11}$   
 $0,823 x_{11} + 4,89 x_{21} = 5,0306 x_{21}$

Wir müssen das kleine Gleichungssystem lösen. Da unser Eigenvektor  $\vec{x}_1$  unnormiert sein darf, setzen wir willkürlich  $x_{11} = 1$ . Die obere Gleichung gibt dann

$$0,2317 + 0,823 x_{21} = 5,0306$$

bzw.  $x_{21} = \frac{5,0306 - 0,2317}{0,823} = 5,8528$  und damit  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 5,8528 \end{pmatrix}$

Wichtig an unserem Eigenvektor ist nicht die Länge (Norm), sondern die Richtung, die durch die relative Länge der beiden Komponenten und durch deren Vorzeichen vorgegeben wird. (Bei Benutzung der unteren Gleichung kommt übrigens ein Eigenvektor gleicher Richtung heraus.)

Jetzt der zweite Eigenvektor  $\vec{x}_2$ . Die Eigenwertgleichung liefert wieder zwei Gleichungen:

$$0,2137 x_{12} + 0,823 x_{22} = 0,0730 x_{12}$$

$$0,823 x_{12} + 4,89 x_{22} = 0,0730 x_{22}$$

Auch hier reicht es, eine der beiden Gleichungen zu lösen. Wir setzen  $x_{12} = 1$ .

$$0,2317 + 0,823 x_{22} = 0,0730$$

gibt  $x_{22} = \frac{0,0730 - 0,2317}{0,823} = -0,1709$  und damit  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ -0,1709 \end{pmatrix}$

Wir haben jetzt die Richtungen der beiden Achsen der Korrelationsellipse. Wir machen die Achsen am Mittelwert fest. Die Bestimmung der Länge der Achsen schenken wir uns hier, da sie einen gewissen statistischen Aufwand bedeutet.

**Merke: Es gibt Programme, die Eigenwerte und Eigenvektoren gleichzeitig berechnen, z.B. das Jakobi-Verfahren**

### 3. Fourierreihen, Fourieranalyse

Jean-Baptiste-Joseph Baron de Fourier, ein französischer Mathematiker und Physiker (1768-1830) entwickelte die Theorie der Fourierreihen. Jede periodische Funktion lässt sich durch eine Fourierreihe darstellen. Das Wichtige ist jedoch, dass den einzelnen **Harmonischen** in vielen Anwendungen eine echte physikalische Bedeutung zukommt. Beispiele sind:

1. Die Gezeiten hängen von Sonne, Mond und eventuellen Eigenschwingungen der Wassermassen ab. Schon vor Einführung der Computer gab es analoge Gezeitenrechenmaschinen, die die durchschnittliche Tide im Sinne einer Fourierreihe berechnen konnten.
2. Schwingquarze werden als Frequenzstabilisatoren in elektronischen Schaltungen verwendet. Ihre Grundschiwingung wäre für die moderne Taktrate im GHz-Bereich viel zu langsam. So regt man den Quarz in einer Oberschwingung an, d.h., er schwingt mit einem Vielfachen seiner Grundschiwingung.

Eine Fourierreihe ist die Darstellung einer beliebigen periodischen Funktion, z.B. wie die auf der Graphik rechts, durch eine Reihe von Sinus- und/oder Kosinustermen. Jede Periode wiederholt sich unverändert.



Es gibt zwei Formen der Fourierreihe. Die eine Form benutzt nur den Sinus oder nur den Kosinus, dafür aber als Zusatzinformation zu jeder Harmonischen  $k$  eine eigene Phasenverschiebung  $\phi_k$ . Die zweite Form trennt von vornherein in Kosinus- und Sinusanteil jeder Harmonischen  $k$ . Beide Formen sind gleichwertig und können umgerechnet werden.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx + \phi_k) \quad \text{als Form mit Sinus und Phase}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad \text{als Form mit Sinus und Kosinus}$$

Ist die Funktion  $f(x)$  über eine Periode, z.B. von  $-\pi$  bis  $+\pi$ , formelmäßig bekannt, dann erhält man die **Koeffizienten** der Fourierreihe durch eine Fourieranalyse. (Bei Periode  $-L$  bis  $L$  ersetzt man in den Formeln unten  $\pi$  durch  $L$  und  $kx$  durch  $kx\pi/L$ . Siehe Kap. 3.2.)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx \quad \text{Doppelter Mittelwert der Funktion}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

Der praktisch viel häufigere Fall ist, dass die Funktion  $f(x)$  nur punktweise bekannt ist, d.h., als Folge von Messwerten im Computer. In diesem Falle werden aus den Integralen Summen, und Index  $k$  läuft nicht mehr bis Unendlich sondern (bei gerader Messwertanzahl) nur noch bis  $n/2$ , wenn  $n$  die Anzahl der Messwerte aus einer Periode ist.

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \quad \text{Doppelter Mittelwert}$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \cos\left(k \left(i - \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n/2$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sin\left( k \left( i - \frac{n}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \quad k = 1, 2, \dots, (n/2)-1$$

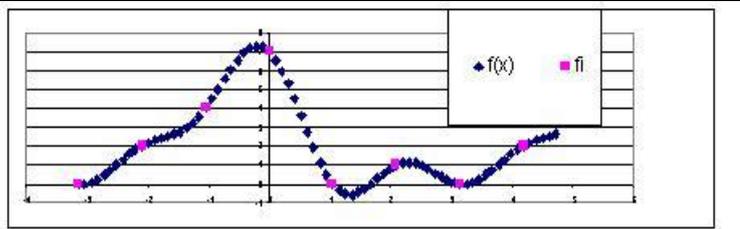
Beachten Sie, dass von den b-Koeffizienten zwei weniger berechnet werden. Insgesamt werden jedoch aus n Messwerten n Koeffizienten berechnet, d.h., es gibt keine Redundanz. Will man aus der Reihe die Funktion f(x) über dem Intervall von  $-\pi$  bis  $+\pi$  wiederherstellen, dann gilt die Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{(n/2)-1} [ a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) ] + \frac{a_{n/2}}{2} \cos\left( \frac{n}{2} x \right).$$

Wünscht man sich die Periode auf ein Intervall  $0 < x < L$  abgebildet, dann ersetzt man das x in der rechten Seite der obigen Formel an allen Stellen, wo es auftritt, durch  $(2\pi x/L - \pi)$ .

Beispiel: n = 6

$f_i = 0 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 0 \quad 1$   
 $a_0 = 4,667 \quad a_1 = 2,5 \quad a_2 = 1,167 \quad a_3 = 2$   
 $b_1 = -1,443 \quad b_2 = -0,866$   
 x läuft von  $-\pi$  bis  $+\pi$ . f(x)  
 interpoliert exakt die Stützpunkte.



**Die schnelle Fourieranalyse (FFT = Fast Fourier Transformation)** nutzt aus, dass bei  $n=2^p$ , z.B.  $n = 2^{10} = 1024$ , immer wieder dieselben Sinus- und Kosinuswerte auftreten. Durch systematische Teilsummenbildung spart man viele der aufwendigen Berechnungen von Sinus- oder Kosinuswerten. Die FFT wird in Computertomographen, in der Festigkeitslehre und in der Bildverarbeitung sehr viel genutzt.

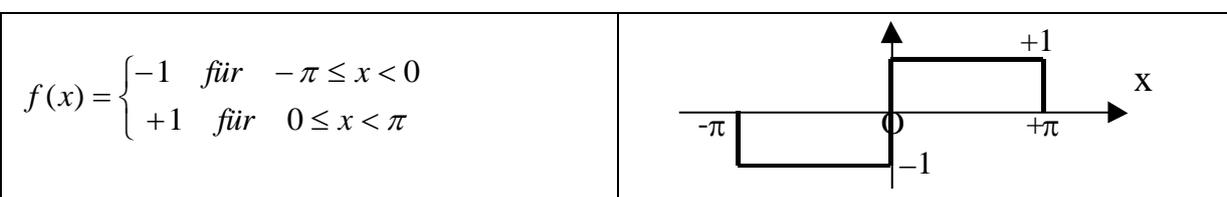
Nicht ganz so schnell, dafür aber bei beliebiger gerader Messwertzahl n einsetzbar, ist eine Fourieranalyse, bei der jeweils ein Sinus-Kosinus-Paar mit Hilfe der Additionstheoreme aus dem vorangehenden Paar berechnet wird. Statt der zeitaufwendigen Sinus- und Kosinusfunktionen sind für beide Werte insgesamt nur 4 Multiplikationen und zwei Additionen auszuführen.

Der  $a_1$ - und der  $b_1$ -Koeffizient liefern die Amplitude  $A_1$  der Grundschwingung:

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$$

Die weiteren Koeffizientenpaare liefern entsprechend die Amplituden der Oberschwingungen, d.h. der Schwingungen mit der doppelten, der dreifachen, 4-fachen, ..., k-fachen Frequenz.

### 3.1 Beispiel Rechteckschwingung



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = 0 \quad \text{ohne Rechnung ersichtlich (Mittel ist 0)}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -1 \cdot \cos(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} 1 \cdot \cos(kx) dx$$

oder

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{-\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} \right\} = 0$$

Alle a-Koeffizienten sind Null. Einmal rein formal, da das Integral  $\sin(k\pi)$  für ganzzahlige k immer Null ist, aber auch sachlich, denn die abgebildete Rechteckschwingung ist eine ungerade Funktion, während die Kosinusterme nur gerade Anteile einer Funktion wiedergeben können. Der Grund: der Kosinus ist selbst eine gerade Funktion.

Die b-Koeffizienten sind die Sinusanteile der Funktion. Das Integral des Sinus ist  $-\cos$ .

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} \right\}$$

Wir setzen die Grenzen ein. Wegen  $\cos(x) = \cos(-x)$  und  $\cos(0) = 1$  erhalten wir

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{\cos(+k\pi)}{k} - \frac{\cos(+k\pi)}{k} + \frac{1}{k} \right\}$$

oder

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{k} - \frac{2 \cos(k\pi)}{k} \right) = \frac{2}{\pi k} (1 - \cos(k\pi)).$$

Die ersten drei b-Koeffizienten sind damit

$$\text{Für } k=1 \quad b_1 = \frac{2}{\pi} (1 - \cos(\pi)) = \frac{2}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{4}{\pi}$$

$$\text{Für } k=2 \quad b_2 = \frac{2}{2\pi} (1 - \cos(2\pi)) = \frac{2}{2\pi} (1 - 1) = 0$$

$$\text{Für } k=3 \quad b_3 = \frac{2}{3\pi} (1 - \cos(3\pi)) = \frac{2}{3\pi} (1 - (-1)) = \frac{4}{3\pi}$$

Allgemein ist  $b_k = 0$  für alle geraden k, d.h. für  $k = 2, 4, 6, \dots$

$$b_k = \frac{4}{k\pi} \quad \text{für alle ungeraden } k, \text{ d.h. } k = 1, 3, 5, \dots$$

### 3.2 Perioden ungleich $2\pi$

Ist die Periode nicht  $2\pi$ , sondern allgemein  $2L$ , dann gilt für die Reihenentwicklung von  $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right],$$

und für die Berechnung der Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

Bei den Summenformeln für diskrete Messwerte statt einer geschlossenen Funktion ändert sich nichts, denn dort tritt die Periode nicht explizit auf, sondern nur indirekt als Messwertzahl  $n$  pro Periode.

### 3.3 Bestimmungstücke von Wellen

**Zeitliche Wellenbewegung:** Beschreibt die Auslenkung  $y$  einer Welle über der Zeit, d.h. die Wellenbewegung an einem festen Messort.

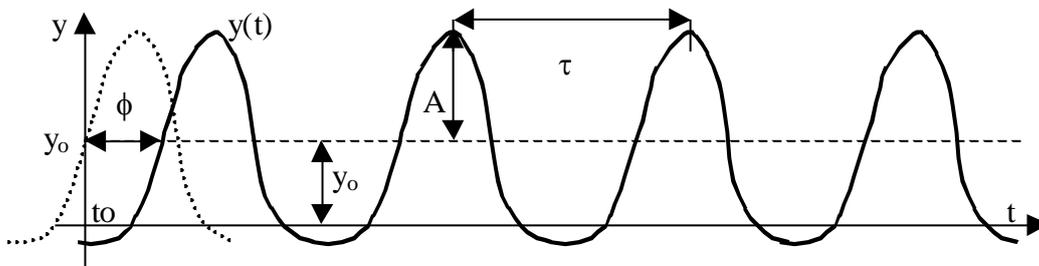
$$y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{hat 4 Parameter}$$

$y_0$  ist die mittlere Höhe der Wellenbewegung (Mitte zwischen oben und unten)

$A$  ist die Amplitude, d.h. der maximale Ausschlag nach oben oder unten von der mittleren Höhe aus gemessen.

$\omega$  ist die Kreisfrequenz mit  $\omega = 2\pi f$  und  $f = 1/\tau$   
 $f$  = Frequenz, d.h. Schwingungen pro Zeiteinheit, z.B. pro Sekunde  
 $\tau$  = Periodendauer, z.B. in Sekunden

$\phi$  ist die Phase, d.h. die Phasenverschiebung der Welle gegenüber einer reinen Sinuswelle gleicher Kreisfrequenz, die zum Zeitpunkt  $t = t_0$  startet.



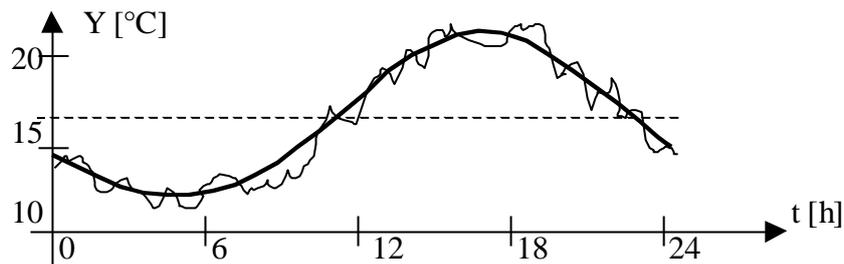
Die Abbildung zeigt eine phasenverschobene Sinuswelle mit der mittleren Höhe  $y_0$ . Die zugehörige reine Sinuswelle ist gestrichelt. Die Periodendauer  $\tau$  erfasst eine vollständige Welle.

### 3.4 Beispiel Tagestemperaturgang

Die Funktion  $y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi)$  soll an einen gemittelten Temperaturverlauf eines Tages angepasst ( gefittet ) werden. Dazu zur Erinnerung einige Zahlen:

Ein Tag hat 24 Stunden. Diese 24 h entsprechen einer Periode von  $2\pi$ . Die Winkleinheit ist Radiant oder [Rad]. Dann ist unsere Kreisfrequenz bei einer vollen Schwingung pro Tag

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \left[ \frac{\text{Rad}}{\text{h}} \right] \quad \text{Kreisfrequenz.}$$



Die Abbildung zeigt den gemessenen Durchschnittsverlauf mit seinen statistischen Schwankungen. Die Modellkurve, unser phasenverschobener Sinus, ist fett gezeichnet. Um z.B. mit Excel eine Kurvenanpassung durchführen zu können, müssen die Messdaten als Wertespalte vorliegen (Zielgröße). Excel kann (ohne Solver) nicht direkt die Amplitude  $A$  und Phase  $\phi$  fitten, da  $\phi$  kein linearer Parameter ist. Wir benötigen eine Aufspaltung des phasenverschobenen Sinus in eine Kosinus- und eine Sinuswelle (Mathe 1). Das statistische Regressionsmodell für die Kurvenanpassung ist mit dieser Aufspaltung

$$y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi) = y_0 + A \sin(\phi) \cos(\omega t) + A \cos(\phi) \sin(\omega t)$$

Konstante  $A \sin(\phi)$  nennen wir in der Regression  $b_1$ ,  $A \cos(\phi)$  nennen wir  $b_2$ , und  $y_0$  nennen wir  $b_0$ . Die Umrechnung folgt aus den Additionstheoremen des Sinus und Kosinus (Mathe 1). Wir müssen demnach in Excel zwei weitere Spalten berechnen gemäß unserem Regressionsmodell, nämlich eine Spalte mit Kosinus- und eine Spalte mit Sinuswerten.

$$y(t) = b_0 + b_1 \cos\left(\frac{2\pi}{24} t\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{24} t\right) \quad (15.4.1)$$

Nach einer Regressionsanalyse habe uns Excel folgende Werte für die Koeffizienten abgeliefert:

$$b_0 = 16,12 \quad b_1 = -2,427 \quad b_2 = -3,313$$

Durch den Vergleich des Regressionsmodells mit Gl. (15.4.1) finden wir:

$$y_0 = b_0 = 16,12 \text{ [}^\circ\text{C]} \quad \text{mittlere Tagestemperatur}$$

$$b_1 = A \sin(\phi), \quad b_2 = A \cos(\phi) \quad \rightarrow \quad \sin(\phi) = b_1/A, \quad \cos(\phi) = b_2/A,$$

Damit können wir den Phasenwinkel  $\phi^*$  berechnen (\* Wenn Nenner negativ, dann  $\pi$  addieren)

$$\phi^* = \arctan\left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right) = \arctan\left(\frac{b_1 A}{A b_2}\right) = \arctan\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \arctan\left(\frac{-2,427}{-3,313}\right) = 0,63$$

Da der Nenner hier negativ ist ( -3,313 ), müssen wir zum Winkel  $\phi^*$  noch  $\pi$  addieren.

$$\phi = \phi^* + \pi = 3,771 \text{ [Rad]}.$$

Es ist üblich, Phasenwinkel immer im Intervall  $[-\pi, +\pi]$  anzugeben. Liegt der Winkel außerhalb, addiert oder subtrahiert man solange  $2\pi$ , bis die Phase im Intervall liegt. Hier subtrahieren wir  $2\pi$  und erhalten

$$\text{Phasenwinkel } \phi = -2,51 \text{ [Rad]}.$$

Die Amplitude  $A$  ergibt sich jetzt, da wir den Phasenwinkel  $\phi$  haben, wegen  $b_1 = A \sin(\phi)$  zu

$$A = \frac{b_1}{\sin(\phi)} = \frac{-2,427}{-0,592} = 4,1 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Man könnte natürlich auch  $A$  mit  $b_2 = A \cos(\phi)$  berechnen, oder wegen  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  auch mit der Formel

$$A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(-2,427)^2 + (-3,313)^2} = 4,1 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Wir rechnen den Phasenwinkel  $\phi = -2,51$  [Rad] in Stunden um, damit wir wissen, wann unser hypothetischer Temperaturverlauf die Mittelwertlinie von unten schneidet.

$$\phi [h] = \frac{\phi [\text{Rad}]}{2\pi [\text{Rad}]} \cdot 24 [h] = \frac{-2,51}{2\pi} \cdot 24 = -9,58 [h]$$

Der aufsteigende  $y_0$ -Durchgang erfolgt bei unserer Sinuswelle 9,58 Stunden **nach** Periodenbeginn ( Mitternacht ), d.h., etwa um **9 Uhr 35 Minuten** wird das Tagesmittel erreicht. Erinnern wir uns daran, dass eine negative Phase die Kurve auf der Horizontalen nach rechts verschiebt.

$$\begin{array}{llll} \text{Minimum:} & 9 \text{ Uhr } 35 & - 6 \text{ Stunden} & = & 3 \text{ Uhr } 35 \\ \text{Maximum:} & 9 \text{ Uhr } 35 & + 6 \text{ Stunden} & = & 15 \text{ Uhr } 35. \end{array}$$

### 3.5 Feststehende räumliche Wellen

Waschbretter, Wellblech oder Sanddünen sind Beispiele für feststehende räumliche Wellen. Die Gleichung für die Auslenkung  $y$  in Abhängigkeit vom Ort  $x$  ist

$$y(x) = y_0 + A \sin(\omega x + \phi) .$$

- $x$  = Entfernung vom Koordinatenursprung z.B. in [m]
- $y_0$  = Mittlere Höhe, d.h. Mitte zwischen Wellenberg und Wellental z.B. in [m]
- $A$  = Amplitude, d.h. maximaler Ausschlag von der Mittellinie ab gerechnet z.B. in [m]

- $\omega$  = Kreisfrequenz mit  $\omega = 2\pi k$ , z.B. [Rad / m], d.h. Winkel/Meter.  
 $\phi$  = Phasenwinkel, d.h. Verschiebung dieser Welle gegenüber einer reinen Sinuswelle, Angabe in [Rad]

Aus der Kreisfrequenz  $\omega$  lassen sich die Wellenzahl  $k$  und die Wellenlänge  $\lambda$  ableiten bzw. umgekehrt.

$$\omega = 2\pi k \text{ [Rad / m]} \quad \rightarrow \quad k = \omega / 2\pi \text{ [ 1/m ]} \quad \text{Wellenzahl pro Meter}$$

$$\lambda = 1 / k = 2\pi / \omega \text{ [m]} \quad \text{Wellenlänge, z.B. von Wellenberg zu Wellenberg}$$

### Beispiel Qualitätssicherung bei der Produktion von Wellblech

Wellblech muss hoch genug gewellt sein, damit die nötige Biegesteifigkeit erreicht wird. Die ist z. B. notwendig, wenn das Wellblech als Garagendach eine vorgegebene Schneelast aushalten soll. Die einzuhaltende Bedingung ist  $2A > \lambda$  bzw.  $A > \lambda / 2$  d.h., die Amplitude muss mindestens die halbe Wellenlänge betragen.

Eine Sonde an der Biegemaschine nimmt die Messwerte  $x$  und  $y(x)$  auf, d.h. die durchgelaufene Millimeterzahl an Wellblech und die zugehörige momentane Blechhöhe. Ein Computer berechnet nach dem in Kapitel 15.4 eingeführten Regressionsmodell

$$y(x) = b_0 + b_1 \cos(\omega x) + b_2 \sin(\omega x)$$

die Koeffizienten  $b_0, b_1, b_2$  und die Kreisfrequenz  $\omega$ . Da  $\omega$  kein linearer Parameter ist, genügt hier kein einfaches Regressionsprogramm, sondern man muss einen **Solver** bemühen. Excel bietet ihn an, aber man muss ihn extra laden und sich in seine Handhabung einarbeiten. Konstante  $A \sin(\phi)$  nennen wir in der Regression  $b_1$ ,  $A \cos(\phi)$  nennen wir  $b_2$ , und  $y_0$  nennen wir  $b_0$ .

Wir nehmen an, der Solver habe folgende Werte berechnet:

$$b_0 = 32,4 \quad b_1 = 13,15 \quad b_2 = 28,62 \quad \omega = 0,114$$

Wir bestimmen daraus  $y_0, A, \lambda, \phi$ .

$$y_0 = b_0 = 32,4 \text{ [mm]} \quad \text{mittlere Höhe}$$

$$A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(13,15)^2 + (28,62)^2} = 31,50 \text{ [mm]} \quad \text{Amplitude}$$

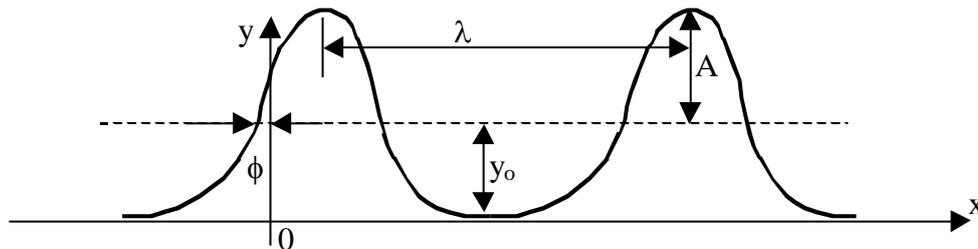
$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,114} = 55,12 \text{ [mm]} \quad \text{Wellenlänge}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \arctan\left(\frac{13,15}{28,62}\right) = 0,431 \text{ [Rad]} \quad \text{Phasenwinkel}$$

Bei einem positiven Phasenwinkel ist die Welle gegenüber der reinen Sinuswelle etwas nach links verschoben. Wir wollen diese Verschiebung in Millimeter umrechnen. Dazu benutzen wir die Tatsache, dass ein Vollwinkel von  $2\pi$  einer Wellenlänge  $\lambda$  entspricht.

$$\phi [mm] = \frac{\phi [Rad]}{2\pi [Rad]} \cdot \lambda [mm] = \frac{0,431}{2\pi} \cdot 55,12 = 3,8 [mm]$$

Die Blechwelle hat demnach in dieser Momentaufnahme der Produktion ihren  $y_0$ -Durchgang 3,8 [mm] **links** vom Messnullpunkt  $x_0 = 0$ .



### 3.6 Im Raum fortschreitende Wellen

Beispiele sind Druckwellen in der Luft oder im Wasser, Konzentrationswellen, Oberflächenwellen. Betrachtet man nur die Zeit  $t$  und eine Richtung  $x$  der Wellenausbreitung, dann hängt die momentane Auslenkung  $y$  vom Ort und der Zeit ab.

$$y(x, t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{\lambda} x) \quad (15.6.1)$$

- $x$  = Entfernung vom Koordinatenursprung z.B. in [m]
- $y_0$  = Mittlere Höhe, d.h. Mitte zwischen Wellenberg und Wellental z.B. in [m]
- $A$  = Amplitude, d.h. maximaler Ausschlag von der Mittellinie ab gerechnet z.B. in [m]
- $\omega$  = Kreisfrequenz mit  $\omega = 2\pi f$ , z.B. [Rad /s], d.h., Winkel pro Sekunde
- $\phi$  = Phasenwinkel, d.h. Verschiebung dieser Welle gegenüber einer reinen Sinuswelle
- $\lambda$  = Wellenlänge, z.B. von Wellenberg zu Wellenberg, Angabe z.B. in [m]

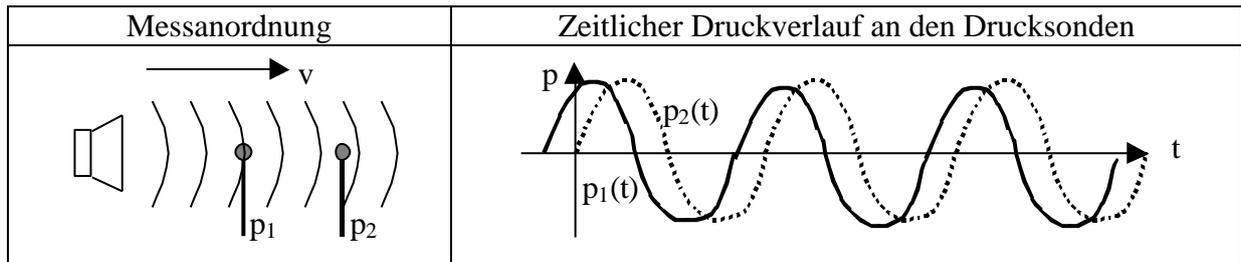
Setzt man  $x = x_0$ , d.h. auf einen konstanten Wert, dann erhält man die zeitlichen Schwankungen am Ort  $x = x_0$  mit der zusätzlichen Phasenverschiebung bzw. Zeitdifferenz

$$-\frac{2\pi}{\lambda} x_0 [Rad] \Leftrightarrow -\frac{x_0}{v} [s] \quad \text{wobei } v [m/s] \text{ die Wellengeschwindigkeit ist.}$$

Setzt man  $t = t_0$  auf einen konstanten Wert, dann erhält man das Momentanbild einer Welle, d.h. die örtlichen Schwankungen zur Zeit  $t_0$ . Das negative Vorzeichen vor  $-\frac{2\pi}{\lambda} x$  in Gl. (15.6.1) kennzeichnet eine Wellenausbreitung in positive  $x$ -Richtung.

#### **Beispiel: Kontinuierliche Schallgeschwindigkeitsmessung mit 2 Drucksonden:**

Zwei Differenzdrucksonden  $p_1$  und  $p_2$  sind im Abstand  $\Delta x = 7,5$  [cm] montiert. Ein Schallgeber (Lautsprecher) erzeugt Schallwellen der Frequenz  $f = 500$  [Hz], d.h. die Kreisfrequenz ist  $\omega = 2\pi f = 3141,6$  [Rad / s].



Ein Rechner registriert jeweils 20 ms lang die Messwerte der beiden Sonden und führt dann mit den beiden Messwertreihen  $p_1$  und  $p_2$  mittels eines **Solverprogramms** (z.B. aus Excel) Kurvenanpassungen durch. Die Ergebnisse seien:

$$p_1(t) = 0,0041 + 29,46 \sin(\omega t + 0,1304)$$

$$p_2(t) = -0,0008 + 29,47 \sin(\omega t - 0,5792)$$

Die Phasendifferenz ist  $\Delta\phi = 0,1304 - (-0,5792) = 0,7096$  [Rad].

Vollwinkel  $2\pi$  entspricht einer Welle bzw.  $\Delta t = 1/500$  [s]. Also entspricht unser Phasenwinkel  $\Delta\phi$  der kleinen Zeitverschiebung zwischen den beiden Wellenankünften,

$$dt = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \Delta t = \frac{0,7096}{2\pi} \cdot \frac{1}{500} = 0,0002259 \text{ [s]}.$$

Mit dem Abstand  $\Delta x = 7,5$  [cm] der beiden Messsonden können wir die Schallgeschwindigkeit berechnen:

$$v = \frac{\Delta x}{dt} = \frac{0,075}{0,0002259} = 332 \left[ \frac{m}{s} \right] \quad \text{Wellengeschwindigkeit.}$$

### 3.7 Wellendifferenzialgleichung

Die Wellendifferenzialgleichung ist eine partielle Differenzialgleichung, denn sie muss die zeitliche und die örtliche Ableitung einer Größe $f$ , z.B. der Auslenkung einer gespannten Saite, miteinander verknüpfen ( $v$ ist die Wellengeschwindigkeit)	Die gespannte Saite ist ein einfaches Modell, aus dem sich die Wellendifferenzialgleichung mit einigem Geschick ableiten lässt. In vielen Physikbüchern ist sie abgehandelt. $F_0$ ist die Kraft (Saitenspannung), $dS$ ein Saitenelement, d.h. ein differenziell kleines Stück Saite.
$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$	

Jede beliebige Funktion  $f(x, t) = u(vt \pm x)$  kommt als Lösung in Frage, wenn sie die Randbedingungen und Anfangswertbedingungen erfüllt. Lösungen können auch alle Kombinationen sein, wie

$$f(x, t) = u(vt + x) \quad \text{linksläufige Welle}$$

$$f(x, t) = w_1(vt \pm x) \pm w_2(vt \pm x) \pm \dots \quad \text{Wellensalat}$$

- $v$  = Wellengeschwindigkeit [m/s] (Phasengeschwindigkeit)
- $f$  = Frequenz der Welle in [1/s] am festen Ort  $x_0$
- $\lambda$  = Wellenlänge in [m] (z.B. von Maximum zu Maximum)
- $\tau$  = Periodendauer in [s] (Dauer einer Schwingung am festen Ort  $x_0$ )

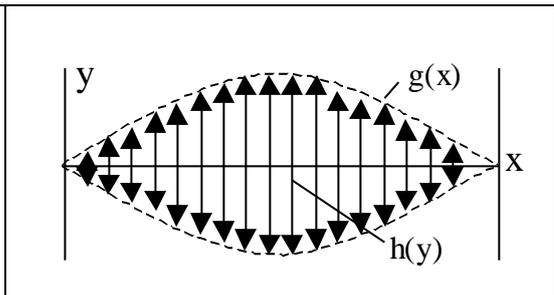
Folgende Formeln gelten:

$$v = \lambda / \tau \quad \tau = 1 / f \quad \omega = 2\pi f \quad f = \omega / 2\pi \quad f = 1 / \tau$$

$$v = \lambda f \quad \lambda = v / f \quad f = v / \lambda \quad \omega = (2\pi v) / \lambda$$

### 3.8 Stehende Wellen

Als stehende Wellen bezeichnet man Wellen, die feste Knotenpunkte haben, an denen sich das Medium nicht zu bewegen scheint. Dazwischen kann man sogenannte **Einhüllende**  $g(x)$  um die Wellenbewegung  $h(y)$  erkennen (siehe Graphik). Stehende Wellen sind eine Überlagerung aus hin- und rücklaufender Welle, die an den Enden reflektiert wird.



Der Produktansatz für  $f(x, t)$  lautet  $f(x, t) = g(x) \cdot h(t)$

Und damit werden die beiden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung aus der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = g(x) \cdot \ddot{h}(t) \quad \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = g''(x) \cdot h(t)$$

Eingesetzt in die Wellengleichung erhalten wir

$$g(x) \ddot{h}(t) = v^2 g''(x) h(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} \equiv k \quad (15.7.1)$$

Die Gleichsetzung mit einer Konstanten  $k$  folgt aus der Überlegung, dass die linke und die rechte Seite von Gl. (15.7.1) für jede  $x - t$ -Kombination gelten muss, und das geht nur, wenn weder die linke Seite von der Zeit  $t$  noch die rechte Seite vom Ort  $x$  abhängt.

Aus der linken Seite von Gl. (15.7.1) folgt  $\ddot{h}(t) = k v^2 h(t)$

oder die DGL  $\ddot{h}(t) - k v^2 h(t) = 0$  . (15.7.2)

Aus der rechten Seite folgt die DGL  $g''(x) - k \cdot g(x) = 0$  (15.7.3)

Das sind zwei gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten, die wir z.B. mit dem e-Ansatz lösen können. Die charakteristische Gleichung der DGL Gl. (15.7.2) lautet

$$r^2 - k v^2 = 0 \quad \text{mit den beiden Wurzeln} \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{k v^2}$$

Da für Wellen nur komplexe Lösungen sinnvoll sind, denn nur diese führen auf den Sinus und den Kosinus, muss  $k < 0$  sein mit Betrag  $K$ , d.h.,  $k = -K$ . Mit diesem Trick, das Vorzeichen von seinem Betrag zu trennen, erhalten wir

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-K \cdot v^2} = \pm i \sqrt{K \cdot v^2} = \pm i \sqrt{K} \cdot v$$

und damit die Lösungsfunktion

$$h(t) = A \cdot \cos(\sqrt{K} \cdot v \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{K} \cdot v \cdot t)$$

als reelle Lösung mit den Konstanten  $A$  und  $B$ , die sich aus eventuellen Anfangsbedingungen ergeben. Für  $g(x)$  erhalten wir auf die gleiche Art die Lösung

$$g(x) = C \cdot \cos(\sqrt{K} \cdot x) + D \cdot \sin(\sqrt{K} \cdot x) \quad \text{mit den Konstanten } C \text{ und } D.$$

Bleiben wir beim Beispiel einer eingespannten Saite, dann gilt am linken Festpunkt

$$g(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0 \quad (\text{Wegen } \cos(0) = 1, \sin(0) = 0).$$

Ist die Grundlinie der Saite  $L$ , dann gilt am rechten Festpunkt, d.h. am Ort  $x = L$

$$g(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin(\sqrt{K} \cdot L) = 0 \quad (\text{Da wegen } C = 0 \text{ das Kosinusglied fehlt})$$

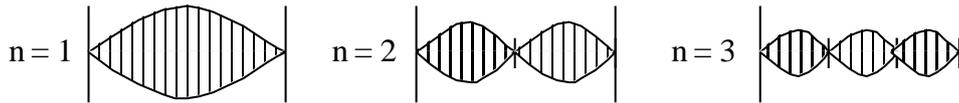
Das ist eine Bedingung für  $K$  und  $L$ , denn der Sinus wird nur Null bei den Argumenten  $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$ , d.h. es muss gelten  $\sqrt{K} \cdot L = n \cdot \pi$ , oder

$$K_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Eine Lösung  $f_n(x, t) = h(t) \cdot g_n(t)$  lautet dann

$$f_n(x, t) = [ A \cdot \cos(\sqrt{K_n} \cdot v \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{K_n} \cdot v \cdot t) ] \cdot D \cdot \sin(\sqrt{K_n} \cdot x).$$

Sie besteht aus dem zeitabhängigen Term, der das Auf und Ab der Saitenelemente am Ort  $x$  beschreibt, und aus der Einhüllenden, die die Amplituden, d.h. die Maximalausschläge, am Ort  $x$  vorgibt.



Bei der gespannten Saite hört man den Grundton bei  $n = 1$ . Den ersten Oberton ( $n = 2$ ) hört man eine Oktave höher (doppelte Frequenz). Auch Summen dieser Lösungen sind zulässig.

### Beispiel Schwingquarz

Schwingquarze werden in elektronischen Schaltungen als Frequenzstabilisatoren eingesetzt. Quarz reagiert auf elektrische Felder mit kleinen Längenänderungen (umgekehrter piezoelektrischer Effekt). Man bedampft die Ober- und Unterseite eines kleinen Quarzkristalls mit Metall, so dass ein Kondensator entsteht. Stimmen Quarzfrequenz und elektronische Schwingkreisfrequenz exakt überein, dann ist bei *Reihenresonanzschaltung* die Dämpfung minimal bzw. die Kondensatorwechselspannung maximal. Dieses Spannungssignal wird von der Elektronik benutzt, um die Frequenz des elektronischen Schwingkreises exakt auf den Quarz abzustimmen.

Der spezielle Quarz habe eine Schallgeschwindigkeit von  $4863 \text{ [m/s]}$ , sei  $L = 2,3 \text{ [mm]}$  dick und werde in der 286. Oberschwingung ( $n = 286$ ) angeregt. Welche Frequenz liegt an?

Bei  $n = 1$ , der Grundschiwingung, ist  $L = \lambda / 2$ .

Bei  $n = 2$ , der Oberschwingung 2, ist  $L = \lambda$ , d.h.  $L = n \lambda / 2 = 2 \lambda / 2$ .

Bei  $n = 286$   $L = 286 \cdot \lambda / 2$  oder  $\lambda = L / 143$ .

Mit  $f = v / \lambda$  können wir jetzt die Frequenz berechnen:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{4863 \cdot 143}{0,0023} \left[ \frac{m}{s \cdot m} \right] = 3,0235 \cdot 10^8 \text{ [Hz]} \quad \text{oder} \quad \mathbf{302,35 \text{ MHz}}$$

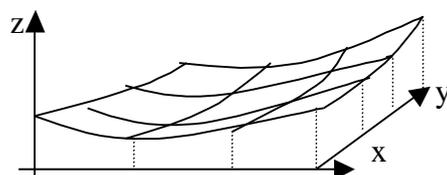
## 4. Funktionen mehrerer Veränderlicher

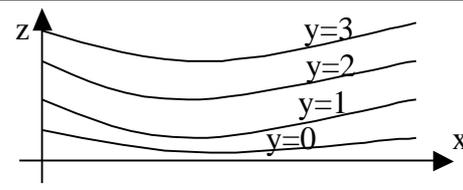
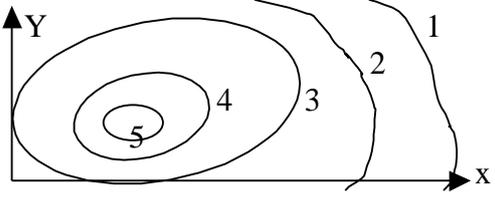
### 4.1 Einführung

Die beiden Funktionen  $f(x)$  oder  $f(t)$  sind beides Funktionen einer Veränderlichen. Die Funktionen  $f(x, t)$  oder  $g(x, y, z)$  sind Funktionen mehrerer Veränderlicher.

#### Darstellungsarten

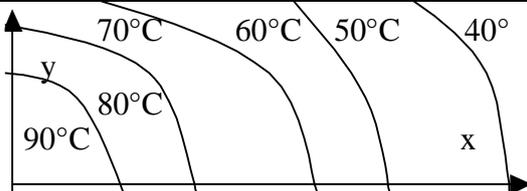
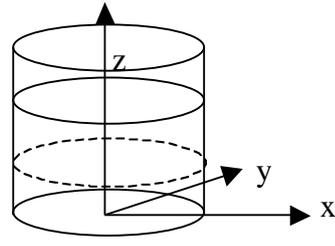
Die **3-D-Illusion** zeigt eine Funktion  $z = f(x, y)$  mit zwei Veränderlichen als gebogene Ebene über der Ebene, die die beiden Veränderlichen  $x$  und  $y$  aufspannen. Man bekommt eine räumliche Vorstellung.



<p>Die <b>2-D-Parameterdarstellung</b> zeigt die Funktion als Kurvenschar einfacher Funktionen über <math>x</math>. Die zweite Veränderliche, <math>y</math>, wurde zum Parameter degradiert. Nur für bestimmte ausgewählte <math>y</math>-Werte erscheinen Kurven.</p>	
<p>Darstellung mit <b>Höhenlinien</b>: Man schaut von oben auf die <math>x</math>-<math>y</math>-Ebene, auf der die Funktion <math>z = f(x,y)</math> definiert ist. Die Linien gleicher Höhe werden dargestellt. Das erinnert an Landkarten, wo ebenso verfahren wird.</p>	

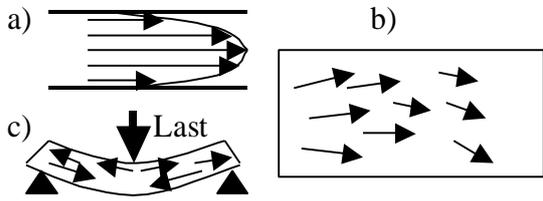
### Skalare Felder

Skalare Felder sind Funktionen auf einer Ebene oder im Raum

<p>Auf einem Blech wird ein <math>x</math>-<math>y</math>-Koordinatensystem gedacht. Die Linien gleicher Temperatur werden als Höhenlinien gezeichnet. Links unten am Blech sitzt offensichtlich die Wärmequelle.</p>	
<p>Konzentrationsverteilung <math>K(z)</math> in einem Tank. Eigentlich müsste es <math>K(x, y, z)</math> heißen, aber in <math>x</math>- bzw. <math>y</math>-Richtung ändert sich hier die Konzentration nicht. Jede Schicht (gestrichelte Höhe) hat ihre Konzentration. Der Salzgehalt sinkt mit der Höhe <math>z</math>.</p>	

### Vektorfelder

Jedem Ebenenpunkt bzw. jedem Raumpunkt ist eine Vektor zugeordnet. Ein Vektor hat Länge und Richtung, und wird meist durch einen Pfeil dargestellt.

<p>a) Strömung in einem Rohr: Am Rand ist die Strömung durch die Reibung geringer. Im Zentrum ist sie am größten.  b) Windkarte <math>v(x, y)</math>  c) Kraft bzw. Dehnung im Material</p>	
---	--

**Rein mathematisches Beispiel eines Vektorfeldes** in einer Ebene (ohne sinnvolle Anwendung). Die Länge (und das Vorzeichen) jeder der beiden Komponenten  $A_x$  und  $A_y$  wird getrennt durch eine Formel vorgegeben. Für jeden beliebigen Punkt der  $x$ - $y$ -Ebene lässt sich so ein Vektor  $\vec{A}$  berechnen

$$\vec{A}(x, y) = (A_x, A_y) = \left( \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

### Beispiel für 2 Punkte

$\vec{A}(1,2) = \left( \frac{4}{\sqrt{1+4}}, \frac{1}{\sqrt{1+4}} \right) = (1.78, 0.45)$ $\vec{A}(1,1) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+1}}, \frac{1}{\sqrt{1+1}} \right) = (0.71, 0.71)$ <p>Komponente <math>A_x</math> zeigt nach rechts, <math>A_y</math> nach oben.</p>	
---	--

### Spezielle Vektorfelder

<p><b>Homogenes Vektorfeld</b> <math>\vec{A}(x,y) = (K_x, K_y)</math>, d.h. alle Vektoren sehen gleich aus.</p> <p><b>Radialsymmetrisches Vektorfeld</b> <math>\vec{A}(r) = f(r)</math>, d.h., die Vektoren zeigen alle nach außen (bzw. innen). Ihre Länge ist <math>f(r)</math>.</p> <p><b>Zylindrisches Vektorfeld</b> <math>\vec{A}(r) = f(r)</math>, d.h., die Vektoren sind Tangenten mit Länge <math>f(r)</math>.</p>	
--	--

### Koordinatensysteme der Ebene

<p>Polarkoordinaten <math>\leftrightarrow</math> Kartesische Koordinaten</p> $r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos(\alpha)$ $\alpha = \arctan(y/x) \quad !!! \qquad y = r \cdot \sin(\alpha)$ <p>(!!! Wenn <math>x &lt; 0</math>, dann <math>\pi</math> oder <math>180^\circ</math> zu <math>\alpha</math> addieren)</p>	
--	--

### Koordinatensysteme im Raum

<p>Kugelkoordinaten <math>\leftrightarrow</math> Kartesische Koordinaten</p> <p><math>r</math> = Radius <span style="margin-left: 100px;"><math>x, y, z</math></span></p> <p><math>\phi</math> = Meridian (Längengrad)</p> <p><math>\theta</math> = Polwinkel (Breitengrad)</p> <p>(Hier wurde die negative y-Achse gezeichnet)</p>	
---	--

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \arctan(y/x) \quad !!!$$

(!!! Wenn  $x < 0$ , dann  $\pi$  oder  $180^\circ$  zu  $\alpha$  addieren)

$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$x = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)$$

$$y = r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$z = r \cdot \sin(\theta)$$

**Vorsicht!** Manchmal wird ein anderes Koordinatensystem benutzt, bei dem der Winkel  $\theta$  von der z-Achse (vom Pol) aus gezählt wird. Damit ändern sich die Formeln. Manche Autoren nehmen auch den arcsin statt des arctan. Auch das ändert die Formeln.

### Zylinderkoordinaten

<p>Zylinderkoordinaten <math>\leftrightarrow</math> Kartesische Koordinaten</p> $r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos(\phi)$ $\phi = \arctan(y/x) \quad !!! \qquad y = r \cdot \sin(\phi)$ <p>(!!! Wenn <math>x &lt; 0</math>, dann <math>\pi</math> oder <math>180^\circ</math> zu <math>\alpha</math> addieren)</p> $z = z \qquad z = z$	
--	--

Bei der Auswahl des geeigneten Koordinatensystems spielen viele Faktoren eine Rolle. Das Hauptprinzip ist jedoch, dass Berechnungen möglichst einfach werden. So muss es nicht unbedingt sein, dass ein kugelförmiger Tank mit Kugelkoordinaten beschrieben wird, sondern manchmal sind die Zylinderkoordinaten sogar günstiger, usw.

### Das bewegliche Dreibein

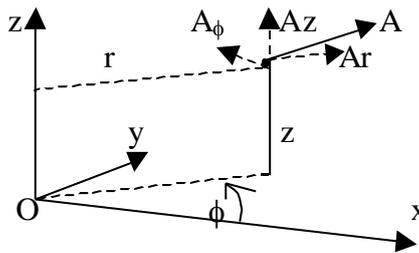
Das bewegliche Dreibein wird von den Komponenten eines Vektors aufgespannt, dessen Startpunkt  $P_0$  mal hier, mal da liegt. Beispiel Erde: Unser Nord-Ost-oben-Dreibein zeigt in Europa in eine andere Richtung, als in Amerika. Zudem dreht es sich mit der Erde mit.

<p>Bei <b>Kartesischen Koordinaten</b> behält das Dreibein seine Raumrichtung. Ein Vektor <math>\mathbf{A}</math> wird im Punkt <math>P_0</math> in dieselben drei Komponenten zerlegt, wie im Ursprung O.</p> $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$	
--	--

<p>Bei <b>Kugelkoordinaten</b> dreht sich das Dreibein nach den beiden Winkeln <math>\phi</math> (Drehung um die z-Achse) und <math>\theta</math> (Winkel von r zur x-y-Ebene). Komponente <math>A_r</math> liegt auf dem Radius r. <math>A_\phi</math> liegt in <math>\phi</math>-Drehrichtung, <math>A_\theta</math> in <math>\theta</math>-Drehrichtung. Alle drei Komponenten <math>A_r</math>, <math>A_\phi</math>, <math>A_\theta</math> stehen immer senkrecht aufeinander. <math>\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_\phi + \mathbf{A}_\theta</math></p>	
---	--

Bei **Zylinderkoordinaten** dreht sich das Dreibein um die z-Achse.  $A_\phi$  liegt in  $\phi$ -Drehrichtung,  $A_r$  liegt auf dem Radius  $r$ . Beide Komponenten  $A_\phi$  und  $A_r$  sind parallel zur x-y-Ebene. Komponente  $A_z$  steht senkrecht in z-Richtung. Für Vektor  $\mathbf{A}$  gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_\phi + \mathbf{A}_z$$



### Beispiel Umrechnung eines Vektors von Zylinderkoordinaten auf Kartesische Koordinaten

$\vec{A} = (A_r, A_\phi, A_z) = A_r \cdot \vec{e}_r + A_\phi \cdot \vec{e}_\phi + A_z \cdot \vec{e}_z$  ist der Vektor  $\mathbf{A}$  in Zylindereinheitsvektoren

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$  bilden das bewegliche Achseneinheitsvektoren-Dreibein. In kartesischen Koordinaten ausgedrückt sind die drei Achseneinheitsvektoren (Zeichnung anschauen!!)

$$\mathbf{e}_r = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0) = \cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_y + 0 \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) = -\sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_y + 0 \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1) = 0 \cdot \mathbf{e}_x + 0 \cdot \mathbf{e}_y + 1 \cdot \mathbf{e}_z$$

Damit wird Vektor  $\mathbf{A}$ , wenn wir die letzten drei Formeln oben einsetzen,

$$\vec{A} = A_r (\cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_y) + A_\phi (-\sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_y) + A_z (1 \cdot \mathbf{e}_z)$$

Wir ordnen die Komponenten nach  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  und erhalten

$$\vec{A} = (A_r \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi)) \cdot \mathbf{e}_x + (A_r \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)) \cdot \mathbf{e}_y + A_z \cdot \mathbf{e}_z$$

oder unter Weglassung der Einheitsvektoren in der einfachen Komponentenschreibweise geklammert und durch Kommas getrennt:

$$\vec{A} = (A_r \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi)), (A_r \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)), A_z$$

oder kurz  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$

## 4.2 Partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Veränderlicher

Die partielle Ableitung liefert den Anstieg einer Tangente an einer Funktion im Punkt P in einer bestimmten Richtung.

Beispiel: Sie stehen auf dem Feldberg im Punkt P und gehen in Ostrichtung (x-Richtung). Geht es aufwärts in dieser Richtung, ist die partielle Ableitung  $f_x$  in diesem Punkt positiv. Gehen Sie vom selben Punkt in Nordrichtung und geht es da abwärts, dann ist die partielle Ableitung  $f_y$  in diesem Punkt negativ.

Die partiellen Differenzial und Differenzenquotienten einer Funktion  $z = f(x, y)$  sind

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Das praktische Differenzieren einer Funktion erfolgt auf genau die gleiche Art und Weise, wie bei den gewöhnlichen Funktionen einer Veränderlichen, **nur dass man die jeweils andere Variable, nach der gerade nicht differenziert wird, wie eine Konstante behandelt.**

Beispiel:  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$

Z. B. part. Ableitung nach x:  $f_x = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2y \cdot (x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$

Hier wurde y beim Differenzieren nach x wie eine Konstante behandelt (y = Konstante)

<p><b>Tangentialebene:</b> Man denke sich eine Pappe an einen Punkt <math>f(x_0, y_0)</math> der gewölbten Funktion <math>f(x, y)</math> gedrückt. Die Gleichung der Tangentialebene ist:</p> $Z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ $= f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$ <p><math>A = f_x</math> und <math>B = f_y</math> sind die Richtungsanstiege.</p>	
--	--

- $Z = f(x_0, y_0)$  ist der Funktionswert im Berührungspunkt
- $A = f_x$  ist die partielle x-Ableitung im Punkt  $(x_0, y_0)$
- $B = f_y$  ist die partielle y-Ableitung im Punkt  $(x_0, y_0)$

Die Tangentialebene entspricht der Tangente an eine Kurve im Fall einer Funktion mit nur einer Veränderlichen. Die Tangentialebene ist auch die Taylorreihenentwicklung der Funktion  $f(x, y)$  bis zum linearen Glied, und spielt damit eine wichtige Rolle in vielen Disziplinen.

### Höhere partielle Ableitungen

$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  ist der Anstieg in x-Richtung

$f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  ist der Anstieg in y-Richtung

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)$  ist die Krümmung in x-Richtung

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \quad \text{ist die Krümmung in y-Richtung}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x \quad \text{ist die x-Anstiegsänderung in y-Richtung}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y \quad \text{ist die y-Anstiegsänderung in x-Richtung}$$

Zumeist gilt  $f_{yx} = f_{xy}$ . Beim Lesen der Indexkette, z.B. „y x“, geht man von rechts nach links, d.h., zuerst partiell nach  $x$  ableiten, dann nach  $y$ .

Beispiel  $f(x, y) = 2y^2 - xy + (x^2/2)$

$f_x = -y + x$	$f_{yx} = -1$
$f_y = 4y - x$	$f_{xy} = -1$ beide gleich

<p><b>Totales Differenzial</b></p> <p>Schritt im Raum: <math>d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y</math></p> <p>Totales Differenzial: <math>dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = f_x dx + f_y dy</math></p>	
---	--

Die Änderung von Funktionswert  $z$  um  $dz$  bei Fortschreiten im Raum  $(x, y)$  um die kleine vektorielle Strecke  $d\vec{r}$  heißt **Totales Differenzial** und spielt eine wichtige Rolle, z.B. in der Thermodynamik. Die Änderung  $dz$  wird so berechnet, als schreite man vom Punkt  $P=f(x_0, y_0)$  auf der Tangentialebene (über dem Schrittlchen  $d\vec{r}$  auf der  $x$ - $y$ -Ebene) bis zum Punkt  $Z$  voran. Dann ist  $dz$  der Höhengewinn von Punkt  $Z$  bezogen auf den Ausgangspunkt  $P$ .

### Kettenregel 1 für mittelbare Funktionen

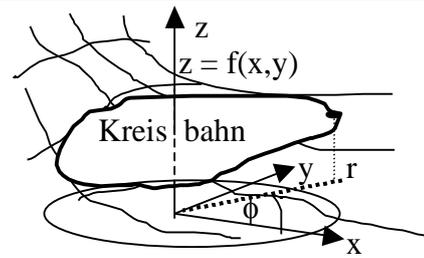
Problem: Ein Punkt bewegt sich auf einer Bahnkurve, deren Koordinaten auf der  $x$ - $y$ -Ebene durch die Funktionen  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$  gegeben sind.

<p>Die Größe <math>t</math> heißt Parameter und könnte z.B. die Zeit sein oder die zurückgelegte Wegstrecke, die der Punkt schon unterwegs ist. Außerdem ist das Geländeprofil als Funktion <math>z = f(x, y)</math> gegeben. Gesucht ist der Anstieg pro Parameterschritt <math>dt</math>. Kettenregel 1 lautet:</p> $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$	
---	--

### Kettenregel 2 für mittelbare Funktionen

Problem: Bahnkurve und Geländeprofil werden in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben.

Ein Punkt bewege sich auf einer Bahn, z.B. einer Kreisbahn, die am leichtesten in Polarkoordinaten beschrieben werden kann. Das Geländeprofil  $z = f(x, y)$  sei aber in einem anderen Koordinatensystem beschrieben, z.B. in Kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$ . Gesucht sind die partiellen Ableitungen nach den Bahnkoordinaten (z.B. Polarkoordinaten  $r$  und  $\phi$ ).



Beispiel:  $x = x(r, \phi) = r \cdot \cos(\phi)$

$r = \text{Bahnradius}$

$y = y(r, \phi) = r \cdot \sin(\phi)$

$\phi = \text{Winkel}$

Gegeben ist das Geländeprofil  $z = f(x, y)$ , gesucht sind die Änderungen von  $z$  in  $r$ -Richtung (radiale Ableitung) und in  $\phi$ -Richtung (tangente Ableitung). Kettenregel 2 lautet in diesem Fall:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{Änderungen von } z \text{ in } r\text{-Richtung (radiale Ableitung)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} \quad \text{Änderungen von } z \text{ in } \phi\text{-Richtung (tangente Ableitung)}$$

Beispiel: Kreisbahn im Abstand  $r = 0,8$  [m] um den Koordinatenursprung im Geländeprofil  $z = x^2 + y$  ebenfalls in Meter. Der Radius  $r$  ist konstant, Winkel  $\phi$  ändert sich. Gesucht ist der Anstieg  $\partial z / \partial \phi$  mit  $z = x^2 + y$ .

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} = 2 \cdot x \cdot (-r \cdot \sin(\phi)) + 1 \cdot r \cdot \cos(\phi)$$

Bei einem aktuellen Winkel von  $\phi = 30^\circ$  finden wir:

$$\partial z / \partial \phi = 2 \cdot r \cdot \cos(30^\circ) (-r \cdot \sin(30^\circ)) + r \cdot \cos(30^\circ)$$

oder

$$\partial z / \partial \phi = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,866 (-0,8 \cdot 0,5) + 0,8 \cdot 0,866 = 0,138 \text{ [m/Rad]}$$

Falls wir den Anstieg pro Grad wünschen, dann das Ergebnis mit  $(180 / \pi)$  multiplizieren. Kettenregel 2 ist natürlich auch bei anderen Kombinationen von Koordinatensystemen anwendbar, muss aber sinngemäß abgewandelt werden.

### 4.3 Der Gradient

So heißt der Vektor, der im Raum oder auf der Ebene die Richtung des stärksten Anstiegs einer Funktion  $f(x, y)$  bzw.  $f(x, y, z)$  anzeigt, und dessen Komponenten gerade die Größe der partiellen Ableitungen haben. Der Gradient ändert sich für gewöhnlich von Punkt zu Punkt.

Schreibweisen für den Gradienten sind:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = (f_x, f_y)^T = (f_x, f_y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y$$

Das Zeichen  $\nabla$  wird „Nabla“ genannt. Für  $\nabla f$  spricht man „Nabla f“. Trennt man das Nabla von der Funktion, dann bleibt der Differenzialoperator, *Nabla* oder *grad* genannt, übrig.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \quad \text{Bei Kartesischen Koordinaten } x, y, z \text{ im Raum}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta \quad \text{Bei Kugelkoordinaten } r, \phi, \theta \text{ im Raum}$$

### Richtungsableitung

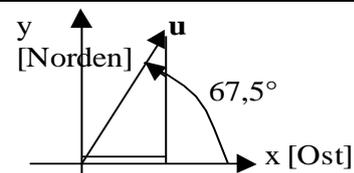
Als Richtungsableitung  $f_u$  bezeichnet man die Projektion des Gradienten auf eine beliebige Richtung  $\vec{u}$ , die durch Vektor  $\vec{u}$  vorgegeben wird. Die Projektion eines Vektors auf eine Richtung berechnet man aus dem Skalarprodukt des Gradienten mit dem Einheitsvektor  $\vec{e}_u$ .

Beispiel: Gegeben ist die „Landschaft“  $z = f(x,y) = 2y^2 - xy + (x^2/2)$

Gesucht ist zuerst der Gradient im Punkt  $(x_0, y_0) = (1, 2)$

$$\nabla f = (-y + x, 4y - x) = (-2 + 1, 4 \cdot 2 - 1) = (-1, 7) = -1 \cdot \vec{e}_x + 7 \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist jetzt die Richtungsableitung in Himmelsrichtung NNO, d. h. eine Richtung mit einem Winkel von  $67,5^\circ$  gegen die x-Richtung (Osten). (In der Seefahrt und Luftfahrt wird dagegen rechts herum gezählt und bei Nord= $0^\circ$  begonnen.)



Der Richtungsvektor  $\vec{u}$  hat demnach die beiden Komponenten

$$\vec{u} = \cos(67,5^\circ) \cdot \vec{e}_x + \sin(67,5^\circ) \cdot \vec{e}_y = (0,3827, 0,9239)$$

Der Einheitsvektor  $\vec{e}_u = \vec{u} / |\vec{u}|$  in u-Richtung ist hier identisch mit Vektor  $\vec{u}$ , da dieser schon die normierte Länge 1 hat, wie man leicht nachprüfen kann:  $\sqrt{0,3827^2 + 0,9239^2} = 1$

$$\frac{df}{du} = \nabla f \cdot \vec{e}_u = (-1, 7) \cdot (0,3827, 0,9239) = -1 \cdot 0,3827 + 7 \cdot 0,9239 = 6,08$$

Um diesen Betrag würde sich die Höhe  $z$  auf der Tangentialebene ändern, ginge man eine Längeneinheit vom Punkt  $(x=1, y=2)$  auf der x-y-Ebene in Richtung  $u$ .

### Der Einheitsvektor in Gradientenrichtung

Man dividiert den Gradienten durch seine Norm und erhält einen Einheitsvektor mit der Länge 1 und der Richtung des Gradienten:

$$\vec{e}_G = \left( \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2}}, \frac{7}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2}} \right) = (-0.1414, 0.9899)$$

Die Länge (Norm) des Gradienten ist bei unserem Beispiel  $|\nabla f| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 7,07$

Keine Richtungsableitung kann größer sein, da ja der Gradient mit seiner Norm die höchstmögliche Ableitung in einem Punkt (x,y) angibt. Um diesen Betrag 7,07 würde sich die Höhe z ändern, ginge man eine Längeneinheit vom Punkt (x=1, y=2) auf der x-y-Ebene in Richtung des Gradienten.

### Der Gradient in einer dimensionsbehafteten Ebene (Beispiel Anodische Oxydation)

Bei der Anodischen Oxidation wird Strom  $i$  durch Abwasser geleitet. Man baut so schwer abbaubare Substanzen ab. Die Prozesskosten werden hauptsächlich von den Stromkosten und der Anodenfläche  $A$  (teures Material) bestimmt. Ein Diplomand machte mit verschiedenen Stromstärken  $i$  und unterschiedlich großen Anodenblechen Versuche. Zu jeder Kombination sind die Prozesskosten zur Aufreinigung von 1 [m<sup>3</sup>] Abwasser bekannt. Mit dem Programm multiple Regression von Excel wurde dann eine Kostenfunktion  $K(i, A)$  durch die Datenpunkte gelegt. Die Funktion ist demnach über einer x-y-Ebene definiert. Die Skaleneinteilung in mm ist ebenfalls angegeben, da sie die Darstellung maßgeblich beeinflusst:

Stromstärke	$i$ [mA]	wurde als x-Variable gewählt	mit 1 [mA] $\cong$ 34 [mm]
Anodenfläche	$A$ [cm <sup>2</sup> ]	wurde als y-Variable gewählt.	mit 1 [cm <sup>2</sup> ] $\cong$ 0,6 [mm]
Kosten	$K$ [Eu]	wurden zur z-Variablen	

Excel lieferte auf Grund der gemessenen Daten und berechneten Kosten folgende Kostenfunktion:

$$K [\text{Eu}] = -29,16 [\text{Eu}] + 3,355 [\text{Eu}/\text{mA}] \cdot i + 0,147 [\text{Eu}/\text{cm}^2] \cdot A - 0,00884 [\text{Eu}/(\text{mA} \cdot \text{cm}^2)] \cdot i \cdot A$$

Die Aufgabe war es, den Gradienten im Punkt  $i = 12,2$  [mA] und  $A = 257,4$  [cm<sup>2</sup>] zu zeichnen. Das besondere Problem bei dieser Aufgabe bestand darin, die sehr unterschiedlichen Größen (Stromstärken lagen etwa bei 12 mA, die Anodenflächen etwa bei 280 cm<sup>2</sup>) maßstabsmäßig zu verarbeiten. Die beiden Achsen können nicht gleich skaliert werden und damit verzerrt sich die Gradientenrichtung.

Die beiden Komponenten des Gradienten sind die partiellen Ableitungen von  $K(i, A)$ :

$$\frac{\partial K}{\partial i} = 3,355 - 0,00884 \cdot A = 1,07958 [\text{Eu} / \text{mA}]$$

$$\frac{\partial K}{\partial A} = 0,147 - 0,00884 \cdot i = 0,039152 [\text{Eu} / \text{cm}^2]$$

Jetzt erfolgt die Umrechnung auf die Zeichenmaßstäbe der zwei Achsen x und y:

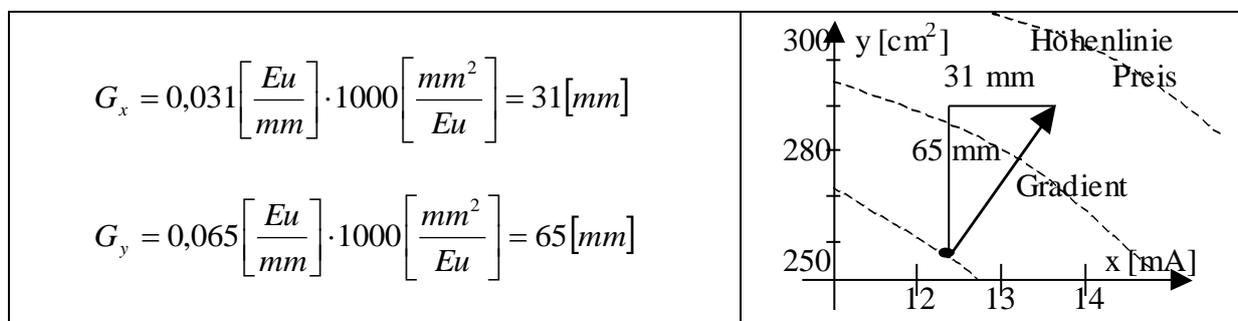
$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial i} \frac{di}{dx} = 1,07958 \left[ \frac{Eu}{mA} \right] \cdot \frac{1}{34} \left[ \frac{mA}{mm} \right] = 0,031 \left[ \frac{Eu}{mm} \right] \quad \text{in x-Richtung}$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial K}{\partial A} \frac{dA}{dy} = 0,039152 \left[ \frac{Eu}{cm^2} \right] \cdot \frac{1}{0,6} \left[ \frac{cm^2}{mm} \right] = 0,085 \left[ \frac{Eu}{mm} \right] \quad \text{in y-Richtung}$$

Da ein Euro/mm als graphische Länge nicht definiert ist, legen wir einfach willkürlich eine Skalierungskonstante für die Größe  $Eu/mm$  fest:

$$K = 1000 \left[ \frac{mm}{Eu/mm} = \frac{mm^2}{Eu} \right]$$

Die graphischen Längen der Komponenten  $G_x$  und  $G_y$  unseres Gradientenvektors können wir nunmehr sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung in mm (oder wenn man will, in Bildschirmpixeln) angeben, d.h., wir können den Gradientenpfeil endlich zeichnen.



Zur Minimierung der Kosten muss man natürlich genau entgegengesetzt zum Gradienten gehen, denn dieser zeigt ja in die Richtung des stärksten Kostenanstiegs. **Der Gradient steht immer senkrecht auf der Höhenlinie, auf der er berechnet wird.**

#### 4.4 Partielle Differenziation und Fehlerfortpflanzung

Es gibt zwei Arten von Fehlern:

1. Zufällige Fehler, auch stochastische Fehler genannt. Wird eine Messung unter gleichen Bedingungen mehrmals wiederholt, dann treten kleine, zufällige Abweichungen auf, die man nicht verhindern kann. Ursachen sind wechselnde zufällige Einflüsse von außen, Ablesungenauigkeiten, Rundungseffekte usw.
2. Systematische Fehler sind nur durch Vergleichsmessungen mit einem anderen Gerät oder durch Messung eines geeichten Normals erkennbar. Mehrfachmessung bringt nichts. Z.B. könnte man eine Analysenwaage mit einem geeichten Gewichtssatz überprüfen (Vorsicht! Gewichte nur mit der Pinzette anfassen – Fettfinger!).

Sehen wir von systematischen Fehlern ab, dann variieren Messwerte aus vielerlei Gründen:

1. Ungenauigkeiten des Messvorgangs selbst, verursacht durch zufällige Störungen, ungenaues Arbeiten, ungenaues Ablesen oder Schwankungen im Messgerät. Diesen Fehler erkennen wir, wenn wir ein und dasselbe Objekt mehrfach messen.

2. Variation der Messobjekte selbst. So ist nicht eine Laborratte wie die andere, sondern sie zeigen individuelle Abweichungen, deren mittlere Größe als Standardabweichung  $\sigma$  (sigma) der Population bezeichnet wird.
3. Variation der Messobjekte im Laufe eines Prozesses (z.B. wachsen Ratten mit der Zeit). Diese Variation wird hier nicht untersucht, sondern ist Gegenstand der Regressionsanalyse oder einer Prozessanalyse.

Eine **Grundgesamtheit** (auch Population genannt) wird in erster Linie durch **Mittelwert  $\mu$**  und **Standardabweichung  $\sigma$**  beschrieben. Da Populationen im Prinzip sehr viele Objekte (Ratten, Personen usw.) enthalten können, sind wir auf Schätzungen von  $\mu$  und  $\sigma$  angewiesen. Wir können prinzipiell unmöglich alle Daten erfassen, zumal Populationen sich auch ständig verändern.

Eine gewisse Anzahl **n** an Messungen bzw. Beobachtungen bilden eine **Stichprobe** vom Umfang **n**. Aus der Stichprobe kann man  $\mu$  und  $\sigma$  der Grundgesamtheit (der Population) schätzen. Beispiel: Man wiegt  $n = 10$  Laborratten. Die  $n = 10$  Gewichtswerte bilden eine Stichprobe vom Umfang  $n = 10$ . Wir können daraus einen Schätzwert für das mittlere Gewicht der *Deutschen Laborratte* bilden, d.h. für die Population aller in Deutschland lebenden Laborratten. Da 10 Messwerte nicht sehr viel sind, ist unsere Schätzung entsprechend ungenau.

**Merke:** Aus einer Stichprobe schätzt man die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  einer Grundgesamtheit

Das **Stichprobenmittel**  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  schätzt das unbekannte Mittel  $\mu$  der Grundgesamtheit aus den **n** Messwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einer Stichprobe

Die **Standardabweichung**  $\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$  schätzt die unbekannte Standardabweichung

$\sigma$  der Grundgesamtheit, d.h. die Streuung der Einzelwerte um das Mittel  $\mu$ . Sigma ( $\sigma_{n-1}$ ) ist kein Fehler, sondern die natürliche Streuung der Objekte in der Population. Nur in der industriellen Fertigung, wo ein Stück wie das andere aussehen sollte, wird  $\sigma$  als Fertigungsfehler verstanden (Qualitätskontrolle).

Der **Fehler des Mittelwerts**  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$  schätzt die Genauigkeit unserer Mittelwertschätzung, und heißt auch **Versuchsfehler** oder Genauigkeit. Wir geben ihn in der Form

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

an, z.B. das mittlere Gewicht der Deutschen Laborratte beträgt nach unserer Schätzung  $232,6 \pm 5,7$  [g]. D.h., das mittlere Gewicht ist nicht genau bekannt, sondern nur auf  $\pm 5,7$  [g]. Würden wir  $n=100$  Ratten wiegen statt nur  $n=10$ , dann bekämen wir einen deutlich kleineren Versuchsfehler, d.h. unsere Mittelwertschätzung würde genauer sein.

Von **Fehlerfortpflanzung** sprechen wir, wenn wir aus fehlerbehafteten Größen, z.B.  $a, b, c, \dots$  nach einer vorliegenden Formel eine neue Größe, z.B. die Größe  $z$ , berechnen. Natürlich ist dann auch  $z$  mit einem Fehler behaftet. Beispiel: Die Fallzeit  $t$  eines Gegenstands ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands hängt von der Fallhöhe  $s$  und der Erdbeschleunigung  $g$  ab.

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

Wir nehmen an, wir hätten die Fallhöhe von  $s = 0,80$  [m] auf einen Millimeter genau vermessen. Die Erdbeschleunigung kennen wir bis zur 2. Dezimalen, d.h.  $g = 9,81$  [m/s<sup>2</sup>]. D.h., wir haben eine Fallhöhe von  $s = 0,800 \pm 0,001$  und eine Erdbeschleunigung von  $g = 9,81 \pm 0,005$ . Gesucht ist der Fehler  $\sigma_t$  der Fallzeit  $t$  als Folge der Fehler  $\sigma_s = 0,001$  und  $\sigma_g = 0,005$ .

**Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß:** Gegeben sind die fehlerbehafteten Größen  $a \pm \sigma_a$ ,  $b \pm \sigma_b$ ,  $c \pm \sigma_c$ , ..., aus denen nach einer Formel  $z = f(a, b, c, \dots)$  eine neue Größe  $z$  berechnet wird. Dann ist der Fehler  $\sigma_z$  von  $z$ :

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \dots}$$

Dabei bezeichnet  $\partial f / \partial a$  die **partielle Ableitung** der Funktion  $f(a, b, c, \dots)$  nach der Variablen  $a$ . Wenn wir  $f(a, b, c, \dots)$  nach Variable  $a$  ableiten, werden alle anderen Größen, hier  $b, c, \dots$  wie Konstante behandelt. Ebenso, wenn wir  $f(a, b, c, \dots)$  nach der Variablen  $b$  ableiten, werden alle anderen Größen  $a, c, \dots$  wie Konstante behandelt, usw.

Enthält die Formel  $z = f(a, b, c, \dots)$  nur Multiplikationen, Divisionen und beliebige, auch negative oder gebrochene, Potenzen, z.B.

$$z = \frac{a^p b^q \dots}{c^r d^s \dots},$$

dann gilt ein **vereinfachtes Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\sigma_z = z \cdot \sqrt{\left(\frac{p \cdot \sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{q \cdot \sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{r \cdot \sigma_c}{c}\right)^2 + \dots}$$

Ist  $z$  die Summe oder Differenz der Größen  $a, b, c, \dots$ , z.B.  $z = a + b - c \dots$ , dann wird es noch einfacher: Es gilt das **Fehlerfortpflanzungsgesetz einer Summe**:

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \dots}$$

Es gibt aber auch Tücken. Z. B. hat das Volumen eines Würfels mit Kantenlänge  $a$  den Wert  $V = a^3$ . Das ist aber nur in der Theorie so. In der Praxis müssen wir jede Kante messen, denn jede Kante kann unterschiedlich gefertigt sein. Jetzt ist  $V = a_1 a_2 a_3$  mit den 3 fehlerbehafteten Größen  $a_1 \pm \sigma_{a1}$ ,  $a_2 \pm \sigma_{a2}$ ,  $a_3 \pm \sigma_{a3}$  und das vereinfachte Fehlerfortpflanzungsgesetz liefert den Fehler

$$\sigma_V = V \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{a1}}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{a2}}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{a3}}{a_3}\right)^2}$$

Rechenbeispiel zum allgemeinen **Fehlerfortpflanzungsgesetz**: Ohmscher Widerstand einer Spule.

Drahtdurchmesser	$D = 0,1420 \pm 0,0006$ mm
Drahtlänge	$L = 94290 \pm 30$ mm

Spezifischer Widerstand  $\rho = (1,70 \pm 0,01) \times 10^{-5} \Omega \text{mm}$

Ist A der Querschnitt, dann ist der Widerstand  $R = 101,2 \Omega$ , nämlich

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{\pi(D/2)^2} = \frac{4\rho L}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot (1,70 \times 10^{-5}) \cdot 94290}{\pi (0,142)^2} = 101,2 \left[ \frac{\Omega \text{mm} \cdot \text{mm}}{(\text{mm})^2} = \Omega \right]$$

Die 3 partiellen Ableitungen und ihre Zahlenwerte sind:

$$\frac{\partial R}{\partial D} = \frac{-2 \cdot 4 \cdot \rho \cdot L}{\pi D^3} = \frac{-8 \cdot 1,7 \times 10^{-5} \cdot 94290}{\pi (0,142)^3} = -1425,6 \left[ \frac{\Omega}{\text{mm}} \right],$$

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{4\rho}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 1,7 \times 10^{-5}}{\pi (0,142)^2} = 0,107 \times 10^{-2} \left[ \frac{\Omega}{\text{mm}} \right],$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{4L}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 94290}{\pi (0,142)^2} = 5,95 \times 10^6 \left[ \frac{1}{\text{mm}} \right].$$

Der Fehler des Ohmschen Widerstands der Spule ist dann

$$\sigma_R = \sqrt{1425,6^2 \cdot 0,0006^2 + (0,107 \times 10^{-2})^2 \cdot 30^2 + (5,95 \times 10^6)^2 \cdot (0,01 \times 10^{-5})^2}$$

oder

$$\sigma_R = \sqrt{0,732 + 0,00103 + 0,354} = 1,04 \Omega.$$

Wir schreiben den Erwartungswert mit seinem Fehler in der Form (Stellenzahl beachten!) als

$$\mathbf{R = 101,2 \pm 1,0 \Omega.}$$

Dasselbe Beispiel zum **vereinfachten Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\sigma_R = R \cdot \sqrt{\left(\frac{2\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2}$$

oder

$$\sigma_R = 101,2 \cdot \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0,0006}{0,142}\right)^2 + \left(\frac{30}{94290}\right)^2 + \left(\frac{0,01 \times 10^{-5}}{1,70 \times 10^{-5}}\right)^2} = 101,2 \cdot \sqrt{0,0001061} = 1,04 \Omega$$

Rechenbeispiel zum **Fehlerfortpflanzungsgesetz einer Summe**:

Zehn Kisten mit einer Höhe von jeweils  $h = 0,300 \pm 0,001$  m ergeben gestapelt eine Höhe von  $H = 10 \cdot 0,3 = 3$  m. Der Fehler der Höhe ist nach der Summenformel

$$\sigma_H = \sqrt{0,001^2 + 0,001^2 + \dots + 0,001^2} = \sqrt{10 \cdot 0,001^2} = 0,0031 \text{ m.}$$

Erwartungswert und Fehler sind damit:  $\mathbf{H = 3,0000 \pm 0,0031 \text{ m.}}$

**Wichtiger Hinweis:** Bei stochastisch abhängigen Teilformeln darf die vereinfachte Formel nicht angewandt werden.

**Beispiel a) Stochastisch unabhängige Teilformeln:**  $K = \sqrt{\frac{\pi\eta}{z^2}} - \frac{\pi a^2}{b}$  mit den fehlerbehafteten Größen a, b, z und η. Da außer der exakt bekannten Zahl π keine fehlerbehaftete Größe in beiden Termen auftritt, darf man den Fehler der beiden Terme getrennt nach der vereinfachten Formel berechnen und dann mit der Summenformel addieren.

**Beispiel b) Stochastisch abhängige Teilformeln:**  $K = \sqrt{\frac{\pi\eta}{z^2}} - \frac{\pi a^2}{\eta b}$ .

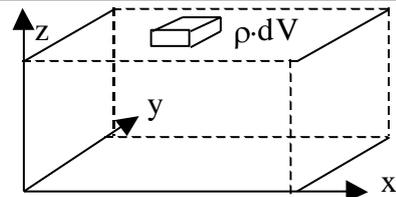
Hier tritt die fehlerbehaftete Größe η in beiden Termen auf. Damit sind diese Terme stochastisch abhängig. Wir **müssen** die allgemeine Fehlerfortpflanzungsformel verwenden.

*Im Zweifelsfall verwenden Sie immer die allgemeine Formel.*

## 5. Mehrfachintegrale

### Einführung

Wir stellen uns einen Quader vor mit Material, dessen Dichte ρ von Ort zu Ort schwankt, d.h., eine Funktion ρ(x,y,z) ist. Nach Riemann denken wir uns den Quader in kleine Volumenelemente dV zerlegt, in denen wir die Dichte als einigermäßen konstant annehmen können.



Die Masse des i-ten Volumenelements ist dann  $dM_i = \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot dV$

Die Summe aller Massen  $dM_i$  ergibt dann annähernd die Gesamtmasse M. Geht man zu infinitesimal kleinen Volumenelementen über, erhält man das Mehrfachintegral, sozusagen die exakte Lösung.

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\rho(x_i, y_i, z_i)}_{\Delta \rho} \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}_{\Delta V} = \iiint_V \underbrace{\rho(x, y, z)}_{d\rho} \underbrace{dx \, dy \, dz}_{dV}$$

### 5.1 Konstante Integrationsgrenzen

Dies ist der einfachste Fall. Die entsprechenden Körper sind im Falle der

Kartesischen Koordinaten  $\leftrightarrow$  der Quader  
 Zylinderkoordinaten  $\leftrightarrow$  der Zylinder, Zylindrische Ringe, Segmente  
 Kugelkoordinaten  $\leftrightarrow$  die Kugel, Kugelschalen, Segmente

### Beispiel CO<sub>2</sub>-Masse in einem Luftquader.

Die Dichte nehme in Ostrichtung  $(0 \leq x \leq a)$  mit Anstieg  $k_1$  zu  
 In Nordrichtung  $(0 \leq y \leq b)$  mit Anstieg  $k_2$  ab  
 Nach oben  $(0 \leq z \leq H)$  barometrisch ab

$$M = \int_0^H \int_0^b \int_0^a (\rho_0 + k_1 x - k_2 y) e^{-\alpha z} dx dy dz$$

Wird z.B. zuerst über  $z$  integriert, dann werden die Variablen  $x$  und  $y$  wie Konstanten behandelt, ähnlich wie in der partiellen Differenziation. Nach der Integration über  $z$  haben wir

$$M = \int_0^b \int_0^a (\rho_0 + k_1 x - k_2 y) \left[ \frac{e^{-\alpha z}}{-\alpha} \right]_0^H dx dy$$

Wir setzen die Grenzen  $0$  und  $H$  für  $z$  ein und erhalten einen konstanten Klammerausdruck, den wir, da er multiplikativ auftritt, vor das Integral ziehen dürfen:

$$M = \int_0^b \int_0^a (\rho_0 + k_1 x - k_2 y) \left( \frac{e^{-\alpha H}}{-\alpha} - \frac{1}{-\alpha} \right) dx dy$$

Die nächste Integration lassen wir über  $y$  laufen, wobei  $x$  wie eine Konstante behandelt wird:

$$M = \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \int_0^a \left[ \rho_0 y + k_1 x y - \frac{k_2 y^2}{2} \right]_0^b dx$$

Wir setzen die Grenzen  $0$  und  $b$  in die eckige Klammer ein und erhalten:

$$M = \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \int_0^a \left( \rho_0 b + k_1 b x - \frac{k_2 b^2}{2} - 0 \right) dx$$

Es ist ein gewöhnliches Integral über  $x$  daraus geworden, das wir integrieren:

$$M = \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \left[ \rho_0 b x + \frac{k_1 b x^2}{2} - \frac{k_2 b^2 x}{2} \right]_0^a$$

Wir setzen die Grenzen  $0$  und  $a$  für  $x$  ein und erhalten die Formel für die Masse:

$$M = \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \left[ \rho_0 b a + \frac{k_1 b a^2}{2} - \frac{k_2 b^2 a}{2} \right]$$

**Produktzerlegung:** Noch einfacher wird die Integration mit konstanten Grenzen, wenn der Integrand sich als Produkt von Teilfunktionen schreiben lässt, wobei jede Teilfunktion nur von einer der Veränderlichen abhängt, z.B.  $f(x,y,z) = g(x) \cdot h(y) \cdot m(z)$ . In diesem Falle wird das 3-fach-Integral zum Produkt von drei einfachen Integralen, die wir einzeln integrieren und die berechneten Zahlen dann multiplizieren

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy \cdot \int_e^f m(z) dz$$

## 5.2 Integrieren auf einer Ebene mit Polarkoordinaten

Polarkoordinaten $r, \phi \leftrightarrow$ Kartesische Koordinaten $x, y$  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan(y/x) \quad !!!$ ( !!! Bei $x < 0$ zum Winkel $\pi$ oder $180^\circ$ addieren )	
--	--

Ein Winkel $\phi$ in Radiant ist das Verhältnis von Bogenstrecke $s$ zum Radius $r$ , d.h. $\phi = s / r$	Ein Flächenelement $dA$ bei <b>kartesischen Koordinaten</b> ist Länge mal Breite, d.h. $dA = dx \cdot dy$	<b>Polarkoordinaten:</b> Kreisbogen = Radius·Winkel, d.h. Kreisbogen = $r \cdot d\phi$ , und damit das Flächenelement $dA = r \cdot d\phi \cdot dr$

Beispiel: Auf einer Kreisscheibe mit Radius  $R$  nehme die Flächenbelegung mit Aluminium in Mikrogramm pro Quadratcentimeter vom Zentrum nach außen hin linear ab:

$$\rho(r, \phi) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \left[ \frac{\mu g}{cm^2} \right]$$

Wie man sieht, hängt die Dichte  $\rho$  nur vom Abstand  $r$  vom Zentrum ab und nicht vom Winkel  $\phi$ , mit dem man das Zentrum umrundet. Der Radius der Scheibe ist  $R = 12 \text{ cm}$ . Die Dichte im Zentrum ist  $\rho_0 = 800 [\mu g / cm^2]$ . Die Gesamtmasse  $M$  an Aluminium auf der Scheibe ist das 2-fach-Integral über alle Flächenelemente  $dA = r d\phi dr$ , wobei über  $r$  und über  $\phi$  integriert wird. Bei der ersten Integration, der über den Winkel  $\phi$  von  $0$  bis  $2\pi$  wird  $r$  wie eine Konstante behandelt.

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr d\phi = \int_0^R \left[ \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r \cdot \phi \right]_0^{2\pi} dr$$

Wir multiplizieren das  $r$ , das vom Ausdruck für das Flächenelement stammt, in den Integranden hinein, und wir setzen in die eckige Klammer die Grenzen  $0$  und  $2\pi$  ein und erhalten die multiplikative Konstante  $2\pi$ , die wir zusammen mit der Konstanten  $\rho_0$  vor das Integralzeichen ziehen können.

$$M = \int_0^R \left( \rho_0 \left( r - \frac{r^2}{R} \right) \cdot 2\pi - 0 \right) dr = 2\pi \cdot \rho_0 \int_0^R \left( r - \frac{r^2}{R} \right) dr$$

Die Integration über  $r$  ist wieder ein einfaches Integral. Wir erhalten:

$$M = 2\pi \rho_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3 \cdot R} \right]_0^R = 2\pi \rho_0 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} \right) = 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{6}$$

Setzen wir die Zahlen  $R = 12 \text{ cm}$  und  $\rho_0 = 800 [\mu\text{g} / \text{cm}^2]$  ein, erhalten wir die Alumasse:

$$M = 2 \pi 800 (12^2 / 6) = 120637 [\mu\text{g}] \cong 0,12 \text{ g}$$

### 5.3 Integration eines Zylinders mit Zylinderkoordinaten

#### Zylinderkoordinaten

<p>Zylinderkoordinaten <math>\leftarrow \rightarrow</math> Kartesische Koordinaten</p> $r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos(\phi)$ $\phi = \arctan(y / x) \quad !!! \qquad y = r \cdot \sin(\phi)$ <p>(!!! Wenn <math>x &lt; 0</math>, dann <math>\pi</math> oder <math>180^\circ</math> zu <math>\alpha</math> addieren)</p> $z = z \qquad z = z$	
---	--

<p>Das Volumenelement bei Zylinderkoordinaten ist ein kleiner Ausschnitt aus einem Kreisring der Höhe <math>dz</math>, der Dicke <math>dr</math> und der Länge <math>r \cdot d\phi</math> (Wegen <i>Bogen = Winkel mal Radius</i>) Das Volumenelement ist somit <math>dV = r d\phi dr dz</math></p>	
---	--

#### Beispiel: Masse der Schaumfüllung eines rotierend ausgeschäumten Zylinders.

<p>Durch die Zentrifugalkraft des rotierenden Zylinders ist der Schaum am Außenmantel dichter als im Zentrum (außen Dichte <math>\rho_R = 72 [\text{Kg}/\text{m}^3]</math>, im Zentrum <math>\rho_0 = 6 [\text{Kg}/\text{m}^3]</math>, Höhe <math>H = 0,3 [\text{m}]</math>, Radius <math>R = 0,12 [\text{m}]</math>. Gesucht ist die Masse <math>M</math> der Schaumfüllung.</p>	
---	--

Die Integration geht über die Variablen  $\phi, r, z$  mit den Grenzen  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq z \leq H$ . Die lineare Funktion  $\rho(r)$  ist, wie man leicht nachprüfen kann mit  $r = 0$  und  $r = R$ ,

$$\rho(r) = \left( \rho_0 + \frac{\rho_R - \rho_0}{R} \cdot r \right) = 6 + \frac{72 - 6}{0,12} \cdot r = 6 + 550 \cdot r.$$

Die erste Integration führen wir wieder über dem Winkel  $\phi$  aus, und auch hier können wir das  $r$  aus dem Volumenelement zum Integranden dazuschlagen

$$M = \int_0^H \int_0^R \int_0^{2\pi} (6 + 550 \cdot r) r d\phi dr dz = \int_0^H \int_0^R \left[ (6r + 550r^2) \phi \right]_0^{2\pi} dr dz$$

Wir setzen die Grenzen  $0$  und  $2\pi$  in die eckige Klammer ein und erhalten Faktor  $2\pi$ . Diesen Faktor ziehen wir vor das Integral und integrieren anschließend über  $r$ .

$$M = 2\pi \int_0^H \left[ \frac{6r^2}{2} + \frac{550r^3}{3} \right]_0^R dz = 2\pi \int_0^H \left( \frac{6R^2}{2} + \frac{550R^3}{3} \right) dz$$

Die runde Klammer ist eine Konstante. Wir können die Zahl ausrechnen mit  $R = 0,12$  und erhalten den Wert  $0,36$ . Wir setzen diesen Wert statt der Klammer ein, und erhalten so als Ergebnis der letzten Integration mit  $H = 0,3$  die Schaummasse  $M$  im Zylinder:

$$M = 2\pi \int_0^H 0,36 dz = 2\pi \left[ 0,36 \cdot z \right]_0^H = 2\pi \cdot 0,36 H = 0,678 \text{ [Kg]}$$

## 5.4 Integration mit Kugelkoordinaten

<p>Kugelkoordinaten <math>\leftrightarrow</math> Kartesische Koordinaten</p> <p><math>r =</math> Radius <span style="margin-left: 150px;"><math>x, y, z</math></span></p> <p><math>\phi =</math> Meridian (Längengrad)</p> <p><math>\theta =</math> Polwinkel (Breitengrad)</p> <p>(Hier wurde die negative <math>y</math>-Achse gezeichnet)</p>	
--	--

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \arctan(y/x) \quad !!!$$

(!!! Wenn  $x < 0$ , dann  $\pi$  oder  $180^\circ$  zu  $\phi$  addieren)

$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$x = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)$$

$$y = r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$z = r \cdot \sin(\theta)$$

<p>Man denkt sich die Kugel aus Schichten der Dicke <math>dr</math> zusammengesetzt. Aus einer Kugelschicht schneidet man das Volumenelement der Breite <math>r_0 d\phi</math> und der Länge <math>r d\theta</math> heraus (das <math>r</math> tritt immer wegen <i>Bogenstrecke = Radius mal Winkel</i> auf). Damit wird das Volumenelement <math>dV = r d\theta r_0 d\phi dr</math> und wegen <math>r_0 = r \cos(\theta)</math> <math>dV = r^2 \cos(\theta) dr d\phi d\theta</math></p>	
---	--

### Beispiel: Schätzung der Erdmasse

Die Erde ist nach den Vorschriften der Französischen Revolution eine Kugel mit dem Umfang  $40.000 \text{ km}$ . Außen besteht die Erde fast nur aus Wasser (Dichte  $1 \text{ [g/cm}^3]$  bzw.  $1000 \text{ [Kg/m}^3]$ ). Im Zentrum sollen sich (entgegen der landläufigen Meinung) bei uns die schweren Elemente Gold und Platin sammeln (Dichte etwa  $20 \text{ [g/cm}^3]$  bzw.  $20.000 \text{ [Kg/m}^3]$ ). Weiterhin nehmen wir an, dass die Dichte zum Zentrum hin linear wächst. Wir erhalten für die Dichtefunktion  $\rho(r) = 20000 - (19000/R)r$ , wie man leicht nachprüfen kann, indem man mal  $r = 0$  und  $r = R$  in die Gleichung einsetzt. Dazwischen läuft die Funktion linear, da sie vom Typ  $y = a + b x$  ist, d.h. eine Geradengleichung. Unser Dreifachintegral summiert alle Volumenelemente  $dV$ , wobei bei festen Integrationsgrenzen die Reihenfolge der Integrationen beliebig ist. Der Radius  $r$  läuft von  $0$  bis  $R$ , der Meridianwinkel  $\phi$  von  $0$  bis  $2\pi$  (Vollkreis um die Erdachse), der Polwinkel  $\theta$  von  $-\pi/2$  (Südpol) bis  $+\pi/2$  (Nordpol).

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho(r) r^2 \cos(\theta) d\theta d\phi dr$$

Wir integrieren hier zuerst über den Radius  $r$ . Die Winkel  $\phi$  und  $\theta$  werden dabei wie Konstanten behandelt. Für  $\rho(r)$  setzen wir unsere Geradengleichung  $20000 - (19000/R)r$  ein. Das  $r^2$  aus dem Volumenelement müssen wir zum Integranden dazuschlagen, so dass wir die Gleichung  $20000 r^2 - (19000 / R) r^3$  zu integrieren haben. Wenn  $\theta$  hier als Konstante behandelt wird, dann auch  $\cos(\theta)$ . Die erfolgte Integration steht in der eckigen Klammer:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[ \frac{20000 r^3}{3} - \frac{19000 r^4}{4R} \right]_0^R \cos(\theta) d\theta d\phi$$

Wir setzen die Grenzen  $0$  und  $R$  in die eckige Klammer ein und erhalten in der eckigen Klammer einen konstanten Ausdruck mit dem Zahlenwert  $1916,67 \cdot R^3$ , den wir, da er multiplikativ auftritt, vor das Integral ziehen dürfen.

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left( \frac{20000 R^3}{3} - \frac{19000 R^4}{4R} \right) \cos(\theta) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1916,67 \cdot R^3 \cdot \cos(\theta) d\theta d\phi$$

Als nächste Integration wählen wir die über  $\phi$ . Auch hier wird  $\theta$  und damit auch  $\cos(\theta)$  als Konstante behandelt. Wir setzen die Grenzen von  $\phi$  in die eckige Klammer ein und erhalten den konstanten Faktor  $2\pi$ , den wir ebenfalls vor das Integral ziehen.

$$M = 1916,67 R^3 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[ \cos(\theta) \cdot \phi \right]_0^{2\pi} d\theta = 1916,67 R^3 \cdot 2\pi \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\theta) d\theta$$

Die letzte Integration erfolgt über  $\theta$ . Der Kosinus integriert ergibt den Sinus. Mit  $\sin(\pi/2)=1$  und  $\sin(-\pi/2)=-1$  entsteht noch einmal ein Faktor, hier mit Wert 2.

$$M = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot R^3 \left[ \sin(\theta) \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot R^3 (1 - (-1)) = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot R^3 \cdot 2$$

Mit  $R = 40.000.000 / (2\pi) = 4 \cdot 10^7 / (2\pi)$  erhalten wir die geschätzte Erdmasse zu

$$M = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot \left( \frac{4 \cdot 10^7}{2\pi} \right)^3 \cdot 2 = 6,214 \cdot 10^{24} [Kg]$$

Die Schätzung der Astronomen, Astrophysiker und Physiker ist  $5,979 \cdot 10^{24} [Kg]$ , also lediglich eine Abweichung von 4% für unser primitives Erdmodell.

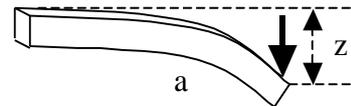
## 5.5 Trägheitsmomente

Als Drehimpuls  $D$  bezeichnet man das Bestreben einer rotierenden Masse, ihre Rotation beizubehalten. Trägheitsmoment  $\Theta$  (sprich „T“ oder „Teta“) ist Teil des Drehimpulses. Die Größe *Trägheitsmoment* taucht überall dort auf, wo sich Massen drehen (Maschinenbau, Astronomie, Atomphysik). Es gibt enge Analogien zwischen der geradlinigen Bewegung und der rotierenden Bewegung von Massen.

Größe	Geradlinige Bewegung	Rotation
Geschwindigkeit	$v$ [ m / s ]	$\omega$ [ Rad / s ] bzw. [ 1 / s ]
Impuls	$I = m \cdot v$ [ Kg m / s ]	$D = \Theta \cdot \omega$ [ Kg m <sup>2</sup> / s ]
Masse	$m$ [ Kg ]	$\Theta$ [ Kg m <sup>2</sup> ]
Energie	$E = \frac{m}{2} v^2 = \frac{I \cdot v}{2}$ $\left[ \frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}^2} \right]$	$E = \frac{\Theta}{2} \omega^2 = \frac{D \omega}{2}$ $\left[ \frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}^2} \right]$

Eher zufällig, aber nicht unwichtig, ist das Auftreten einer Größe **Flächenträgheitsmoment**, die ähnlich dem Trägheitsmoment von Rotationskörpern berechnet wird. Das Flächenträgheitsmoment spielt bei der Berechnung von Balkenbiegungen eine Rolle.

**Balkenbiegung nach Bernoulli** : Im ersten Fall denkt man sich den Balken links starr befestigt. Rechts wird er belastet und biegt sich nach unten. Die Strecke  $z$ , um die sich das Balkenende senkt, berechnet Bernoulli.



(Jakob Bernoulli, Schweizer Mathematiker und Physiker, 1654-1705, einer von 8 berühmten Bernoullis)

Nach Bernoulli ist 
$$z = - \frac{L}{\epsilon \Theta} \frac{a^3}{3}$$

$\Theta$  = Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts in [ m<sup>4</sup> ]

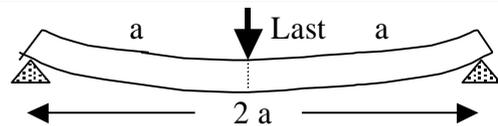
$\epsilon$  = Elastizitätsmodul [ N / m<sup>2</sup> ] ( z.B. hat Stahl etwa  $\epsilon = 2 \cdot 10^{11}$  [ N / m<sup>2</sup> ] ) Diese Größe folgt aus der Gleichung  $F = \epsilon A \cdot (da/a)$ , wobei  $F$  eine Zugkraft in [N] ist,  $A$  die

Querschnittsfläche in [m<sup>2</sup>],  $(da/a)$  die relative Längenänderung der belasteten Probe)

$L$  = Last, die den Balken biegt, in [N],  $L = m \cdot g$ ,  $g = 9,81$  Erdbeschleunigung

$a$  = Balkenlänge in [m]

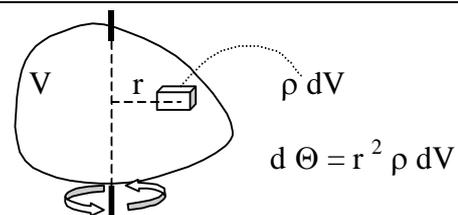
Im Fall 2 nach Bernoulli liegt der Balken an den Enden auf und wird in der Mitte belastet. Die Berechnung erfolgt wie oben. Man rechnet mit der halben Last an jedem Ende und halber Länge.



Berechnung des **Massenträgheitsmomentes**

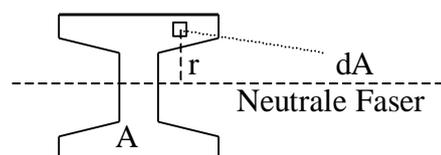
$$\Theta = \iiint_V \rho \cdot r^2 dV$$

$r$  = Abstand zur Drehachse,  $\rho$  = Dichte



Berechnung des **Flächenträgheitsmomentes**

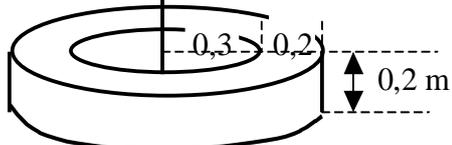
$$\Theta = \iint_A r^2 dA$$



### Beispiel: Bewegungsenergie einer Schwungscheibe

Um bei Bergwerkslokomotiven auf den gefährlichen Stromabnehmer (Funkengefahr) verzichten zu können, kamen findige Ingenieure auf die Idee, die Energie in einer

Schwungscheibe zu speichern. Diese wird in Förderkorbnähe, wo immer frische Luft ist und keine Explosionsgefahr besteht, mit einem Elektromotor in Schwung gebracht.

<p>Dichte <math>\rho</math> des Materials <math>\rho = 7800 \text{ [Kg/m}^3\text{]}</math>          Frequenz <math>f = 20.000 \text{ [U/min]}</math></p> <p>Gesucht ist die Energie <math>E \text{ [KWh]}</math> ???          Achse und Speichenscheibe vernachlässigen wir</p>	
---	--

**Hinweis: Massenträgheitsmomente immer zuerst mit Zylinderkoordinaten probieren**

Das Volumenelement der Zylinderkoordinaten war  $dV = r \, d\phi \, dr \, dz$ . Bei unserer Schwungscheibe, eigentlich ein fester Stahling, läuft  $r$  von 0,3 bis 0,5 [m], Winkel  $\phi$  läuft einmal rund, d.h. von 0 bis  $2\pi$ , Höhe  $z$  läuft von 0 bis 0,2 [m]. Damit wird das Trägheitsmoment

$$(13.5.2) \quad \Theta = \int_{z=0}^{0,2} \int_{r=0,3}^{0,5} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho r^2 \, r \, d\phi \, dr \, dz = \iiint \rho r^3 \, d\phi \, dr \, dz$$

Da wir feste Grenzen haben, ist die Reihenfolge der Integrationen beliebig. Wir integrieren zuerst über den Winkel  $\phi$ . Dabei entsteht der Faktor  $2\pi$ , den wir zusammen mit dem  $\rho$  vor das Integral ziehen.

$$\Theta = \rho \int_{z=0}^{0,2} \int_{r=0,3}^{0,5} \left[ r^3 \cdot \phi \right]_0^{2\pi} \, dr \, dz = 2\pi \rho \int_0^{0,2} \int_{0,3}^{0,5} r^3 \, dr \, dz$$

Die nächste Integration lassen wir über  $r$  laufen. Setzen wir die Grenzen 0,3 und 0,5 ein, entsteht in der eckigen Klammer ein konstanter Ausdruck mit dem Wert 0,0136. Wir lassen ihn im Integral.

$$\Theta = 2\pi \rho \int_0^{0,2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{0,3}^{0,5} \, dz = 2\pi \rho \int_0^{0,2} \left( \frac{0,5^4}{4} - \frac{0,3^4}{4} \right) \, dz$$

Die letzte Integration erfolgt über die Höhe  $z$ , wobei in der eckigen Klammer ein weiterer Faktor 0,2 hinzukommt.

$$\Theta = 2\pi \rho \int_0^{0,2} 0,0136 \, dz = 2\pi \rho \left[ 0,0136 \cdot z \right]_0^{0,2} = 2\pi \rho \cdot 0,0136 \cdot 0,2$$

$$\Theta = 2\pi \cdot 7800 \cdot 0,0136 \cdot 0,2 = 133,30 \text{ [Kg m}^2\text{]}$$

Wir berechnen jetzt aus der Umdrehungsfrequenz  $f$  die Kreisfrequenz  $\omega$ .

$$\text{Frequenz } f = 20.000 \text{ U/min} \rightarrow f = 20.000 / 60 \text{ U/s} = 333,33 \text{ U/s} \quad \omega = 2\pi f = 2094,4 \text{ [1/s]}$$

$$\text{Energie } E = (\Theta \omega^2) / 2 = (133,33 \cdot 2094,4^2) / 2 = 2,924 \cdot 10^8 \text{ [Kgm}^2\text{/s}^2 = \text{Nm} = \text{Ws}]}$$

1 KWh = 1000 · 3600 [Ws]      und damit       $E = \frac{2,924 \cdot 10^8}{3,6 \cdot 10^6} = 81,2 \text{ [KWh]}$

Mit dieser Energie könnte ein Auto etwa 3 Stunden über die Autobahn fahren.

### 5.6 Mehrfachintegrale mit variablen Integrationsgrenzen

Unter variablen Integrationsgrenzen versteht man solche, bei denen als Grenzen nicht nur Konstanten auftreten, sondern auch Ausdrücke, die von den Integrationsvariablen abhängen. Nicht als variabel gelten Hinweise auf die Integrationsvariable, der das Integralzeichen zugeordnet ist (siehe z.B. Gl. 13.5.2 oder 13.5.3).

#### Beispiel: Trägheitsmoment eines hohlen Kegelstumpfes

<p>Drehachse ist die z-Achse, <math>\rho</math> = Dichte  R1 = Innendradius  R2 = Oberer Außenradius  R3 = Unterer Außenradius  H = Kegelstumpfhöhe  dV = Volumenelement mit <math>dV = r \, d\phi \, dr \, dz</math>  und den Koordinaten <math>r, \phi, z</math>  <math>\phi</math> = Medianwinkel (wird ab x-Achse gezählt)</p>	
--	--

Zahlenwerte für die Konstanten sind:       $R1 = 1 \text{ [m]}, \quad R2 = 1,4 \text{ [m]}, \quad R3 = 1,9 \text{ [m]}$   
 $H = 0,3 \text{ [m]}, \quad \rho = 7800 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$

$\phi$  läuft von 0 bis  $2\pi$   
z läuft von 0 bis H

Die obere Grenze der Integrationsvariablen  $r$  ist die schräge Außenwand. Am Boden des Kegelstumpfes läuft  $r$  vom Innenradius  $R1$  bis zum unteren Außenradius  $R3$ . Oben läuft  $r$  hingegen vom Innenradius  $R1$  nur bis zum oberen Außenradius  $R2$ . Bei einer Höhe  $z$  des Volumenelements dazwischen liegt die obere Begrenzung für  $r$  auf einer schrägen Geraden, d.h.

$r$  läuft von  $R1$  bis  $R3 - \left(\frac{R3 - R2}{H}\right) \cdot z$ ,      und hat damit eine variable obere

Grenze. Setzt man für  $z$  mal 0, mal H ein, dann erkennt man die Richtigkeit der Formel. Da der Klammerausdruck  $(R3 - R2) / H = (1,9 - 1,4) / 0,3 = 1,667$  ist, lässt sich die variable obere Grenze auch schreiben als

$$1,9 - 1,667 \cdot z \quad \text{(eine Geradengleichung)}$$

Damit wird das Dreifachintegral des Trägheitsmomentes

$$\Theta = \iiint_V \rho r^2 \, dV = \int_{z=0}^{0,3} \int_{r=1,0}^{1,9-1,667z} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho r^2 \, r \, d\phi \, dr \, dz$$

Zur Erinnerung: Die Angaben  $z = 0$ ,  $r = 1,0$  oder  $\phi = 0$  bei den unteren Integrationsgrenzen bedeutet nicht, dass die unteren Grenzen variabel sind, sondern sind nur ein Hinweis darauf, über welche Variable bei diesem Teilintegral integriert wird.

**Die Reihenfolge der Integrationen ist nicht mehr beliebig**

- a) **Suche eine Variable, die nicht in einer Grenze auftritt.** In unserem Beispiel haben wir dafür  $r$  und  $\phi$  zur Auswahl, da sie beide nicht in einem variablen Ausdruck einer Grenze auftreten. Einzig Variable  $z$  tritt in der oberen Grenze für  $r$  auf.
- b) **Löse das Integral für die ausgewählte Variable und setze die Grenzen in die eckige Klammer ein.** Die Zahl der Integrale hat sich damit um eines verringert. **Wiederhole die Punkte a und b bis alle Integrale gelöst sind.**

Punkt **a**: Wir wählen als erste Integration die über  $\phi$ .

Punkt **b**: Wir integrieren über  $\phi$ . Die Konstante  $\rho$  ziehen wir gleich vor das Integral. Das  $r$  aus dem Ausdruck für das Volumenelement schlagen wir zum  $r^2$  der  $\Theta$ -Formel dazu, so dass unser Integrand jetzt  $\rho r^3$  lautet. Bei der Integration über  $\phi$  entsteht der Faktor  $2\pi$ , den wir ebenfalls vor das Integral ziehen.

$$\Theta = \rho \int_{z=0}^{0,3} \int_{r=1,0}^{1,9-1,667z} \int_0^{2\pi} [r^3 \cdot \phi] dr dz = 2\pi \rho \int_{z=0}^{0,3} \int_{r=1,0}^{1,9-1,667z} r^3 dr dz$$

Punkt **a**: Wir müssen jetzt über  $r$  integrieren. Die Variable  $r$  tritt im Gegensatz zu  $z$  nicht in einem variablen Ausdruck in einer Grenze auf.

Punkt **b**:

$$\Theta = 2\pi \rho \int_{z=0}^{0,3} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{1,0}^{1,9-1,667z} dz = 2\pi \rho \int_{z=0}^{0,3} \left( \frac{(1,9-1,667 \cdot z)^4}{4} - \frac{1,0}{4} \right) dz$$

Punkt **a**: Wir haben nur noch das einfache Integral über  $z$  zur Auswahl.

Punkt **b**: Zur Vereinfachung ziehen wir den Faktor  $\frac{1}{4}$  aus der Klammer vor das Integral.

$$\Theta = \frac{2\pi \rho}{4} \int_{z=0}^{0,3} \left( (1,9-1,667 \cdot z)^4 - 1 \right) dz = \frac{\pi \rho}{2} \left[ \frac{(1,9-1,667 \cdot z)^5}{5 \cdot (-1,667)} - z \right]_0^{0,3}$$

oder

$$\Theta = \frac{\pi \cdot 7800}{2} \left( \frac{(1,9-1,667 \cdot 0,3)^5}{-5 \cdot 1,667} - 0,3 - \left( \frac{1,9^5}{-5 \cdot 1,667} - 0 \right) \right)$$

oder

$$\Theta = 12252 \cdot (-0,6453 - 0,3 + 2,9713) = 24823 \text{ [Kg m}^2\text{]}$$

### Beispiel: Trägheitsmoment einer Kugel

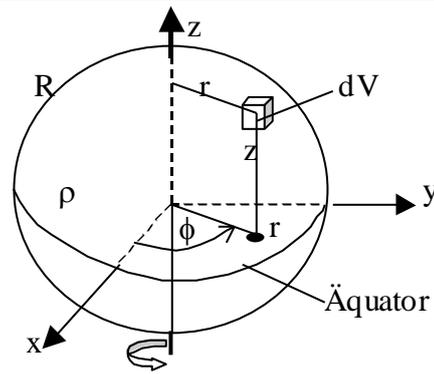
Bei Trägheitsmomenten immer zuerst mit Zylinderkoordinaten probieren, da diese eine natürliche Drehachse haben.

Drehachse ist die z-Achse,  $\rho$  = Dichte

R = Radius

$dV$  = Volumenelement mit  $dV = r \, d\phi \, dr \, dz$   
und den Koordinaten  $r, \phi, z$

$\phi$  = Medianwinkel (wird ab x-Achse gezählt)



$\phi$  läuft von 0 bis  $2\pi$  (ein Mal im Kreis)

$z$  läuft von  $-R$  bis  $+R$  (vom Südpol zum Nordpol)

Die obere Grenze der Integrationsvariablen  $r$  ist die gebogene Außenwand der Kugel. Am Südpol und am Nordpol läuft  $r$  von 0 bis 0, d.h. kein Stück. In Äquatorhöhe läuft  $r$  von der Achse bis zum Äquator, d.h. von 0 bis  $R$ . Bei einer beliebigen Höhe  $z$  des Volumenelements dazwischen liegt die obere Begrenzung für  $r$  auf einem Halbkreis, d.h.

$r$  läuft von 0 bis  $r_{obGr} = \sqrt{R^2 - z^2}$ , und hat damit eine variable obere Grenze.

Setzen wir für  $z$  mal  $-R$ , mal  $+R$  oder mal 0 ein, dann erkennen wir, dass die Formel zumindest am Südpol, am Nordpol und am Äquator stimmt. Der Wurzelausdruck folgt aus der Gleichung  $R^2 = z^2 + r^2$  für einen Halbkreis mit der senkrechten Sehne  $2R$  auf der  $z$ -Achse und der auf der Sehne senkrecht angetragenen Höhe  $r$ , die somit waagrecht zu zeichnen ist. Damit wird unser Dreifachintegral

$$\Theta = \iiint_V \rho r^2 dV = \int_{z=-R}^R \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho r^2 r d\phi dr dz$$

Punkt **a**: Wir haben für die erste Integration die beiden Variablen  $r$  und  $\phi$  zur Auswahl, da beide nicht in einer variablen Grenze auftreten.

Punkt **b**: Wir ziehen die Konstante  $\rho$  vor das Integral und schlagen das  $r$  aus dem Volumenelement zum  $r^2$  der  $\Theta$ -Formel, d.h., wir erhalten als Integranden den Ausdruck  $r^3$ . Wir wählen  $\phi$  als erste Integrationsvariable. Es entsteht der Faktor  $2\pi$ , den wir vor das Integral ziehen.

$$\Theta = \rho \int_{z=-R}^{+R} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left[ r^3 \cdot \phi \right]_0^{2\pi} dr dz = 2\pi \rho \int_{z=-R}^{+R} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 dr dz$$

Punkt **a**: Wir müssen jetzt über  $r$  integrieren, da es die einzige der beiden Variablen  $r$  und  $z$  ist, die nicht in einer variablen Grenze vorkommt.

Punkt **b**: Wir integrieren über  $r$  und setzen die Grenzen 0 und  $\sqrt{R^2 - z^2}$  in die eckige Klammer ein.

$$\Theta = 2\pi \rho \int_{z=-R}^R \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = 2\pi \rho \int_{z=-R}^{+R} \left( \frac{(\sqrt{R^2-z^2})^4}{4} - 0 \right) dz$$

oder

$$\Theta = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz$$

oder

$$\Theta = \frac{\pi \rho}{2} \left[ R^4 z - \frac{2R^2}{3} z^3 + \frac{z^5}{5} \right]_{-R}^R = \frac{\pi \rho R^5}{2} \left( 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \pi \rho R^5 \left( \frac{8}{15} \right).$$

mit der Dimension [Kg m<sup>2</sup>].

## 6. Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen beschreiben das Verhalten technischer oder biologischer Modellsysteme über der Zeit und/oder im Raum verteilt. Die Lösung einer Differenzialgleichung ist demnach kein einzelner Zahlenwert, sondern z.B. eine Bahnkurve, eine Wachstumskurve oder eine sich mit der Zeit ändernde Konzentrationsverteilung.

Gleichungen, die Ableitungen enthalten und deren Lösung eine Funktion (nicht ein Wert) ist, sind Differenzialgleichungen. Ihre allgemeine Form ist

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}) \quad (\mathbf{y}^{(n)} \text{ bedeutet hier n-te Ableitung})$$

Beispiele :

- |   |  |
|---|--|
| (1) $y' = 2x$                           | Diese sehr einfache DGL liefert eine Parabel       |
| (2) $y'(x) = y(x)$                      | Diese liefert eine e-Kurve (Wachstumskurve)        |
| (3) $\dot{y}(t) = \frac{y_B - y(t)}{T}$ | Diese liefert ebenfalls eine e-Kurve, aber fallend |

Jede Funktion  $y(x)$  bzw.  $y(t)$ , die die DGL erfüllt, heißt **Lösung**. So ist z.B. die Funktion

$$y(x) = x^2 + 7 \quad \text{mit der Ableitung} \quad y'(x) = 2x \quad \text{eine Lösung der DGL (1)}$$

oder

$$y(x) = 90 e^x \quad \text{mit der Ableitung} \quad y'(x) = 90 e^x \quad \text{eine Lösung der DGL (2).}$$

Lösungsfunktionen findet man

- (1) Numerisch punktweise als Graphik oder Wertetabelle mit dem Euler-Cauchy-Verfahren, dem Runge-Kutta-Verfahren oder einem anderen numerischen Lösungsverfahren
- (2) Algebraisch nach verschiedenen Methoden. Jeder DGL-Typ hat besonders günstige Methoden, die man anwenden sollte.

### 6.1 Numerische Lösung einer DGL nach Euler

Das Verfahren beruht darauf, dass man in einem Startpunkt  $x_0$  mit Hilfe der DGL den Anstieg der Lösungskurve in diesem Punkt berechnet, ein kleines Stück Lösung zeichnet, d.h. ein

winziges Geradenstück. Dieses kleine Geradenstück führt zum nächsten Punkt, den man nunmehr zum Ausgangspunkt des nächsten kleinen Schrittes macht, usw. Wegen  $\dot{x} = dx/dt$  wird  $dx = \dot{x} \cdot dt$ , d.h. wir können die Änderung  $dx$  ausrechnen aus  $\dot{x}$  und einem willkürlich festzulegenden Schritt  $dt$  der unabhängigen Variablen. Den Wert von  $\dot{x}$  liefert uns die DGL. Die unabhängige Variable  $t$  lässt man meistens bei  $t = 0$  starten. Die Schrittweite  $dt$  wählt man sehr klein, sonst wird die numerische Lösung zu ungenau.

Beispiel:  $2\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$       oder       $\dot{x}(t) = -\frac{3}{2}x(t)$

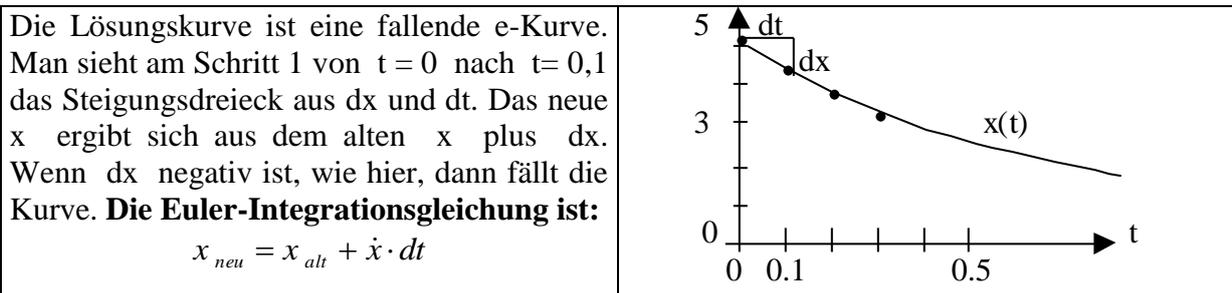
Startwert  $x_0 = 5$        $\rightarrow$        $\dot{x}_0 = -\frac{3}{2} \cdot 5 = -7,5$

Mit Schrittweite  $\Delta t = 0,1$  [s]       $\rightarrow$        $x_1 = x_0 + \dot{x} \cdot \Delta t$

$x_1 = 5 - 7,5 \cdot 0,1 = 4,25$        $\rightarrow$        $\dot{x}_1 = -\frac{3}{2} \cdot 4,25 = -6,37$

$x_2 = 4,25 - 6,37 \cdot 0,1 = 3,61$        $\rightarrow$        $\dot{x}_2 = -\frac{3}{2} \cdot 3,61 = -5,41$

$x_3 = 3,61 - 5,41 \cdot 0,1 = 3,07$       usw.



## 6.2 Klassifikation der DGL

Typ	Eigenschaft	Beispiel
gewöhnliche DGL	Nur eine unabhängige Variable	$y''(t) + y(t) = 0$
partielle DGL	Mehrere unabhängige Variable z.B. $x$ und $t$	$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$
n-ter Ordnung	Bis zur n-ten Ableitung	$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0$
linear	Keine Potenzen oder Produkte der $y$	$y''(x) + 7y(x) = 0$
nichtlinear	Potenzen oder Produkte der $y$	$y(x)y'(x) - 7y^2(x) = 0$
Nichtkonstante Koeff	Auftreten nichtkonst. Koeffizienten	$x \cdot y''(x) + (1-x^2) \cdot y(x) = 0$
inhomogen	Mit Störfunktion $f(x)$ rechts statt 0	$Ay'(x) + by(x) = x^2$
DGL-System	Gekoppelte DGL z.B. für $y$ und $z$	$y'(x)z(x) - y(x) = 0$ $z'(x) + y(x) = 0$

### 6.3 Algebraische Lösung von DGL

Zuerst einige Begriffsbestimmungen:

**Eine spezielle Lösung** ist eine eindeutige Kurve mit einem Startwert. Z.B. startet die Kurve  $y(x) = x^2 + 7$  im Punkt  $(x=0; y=7)$

**Eine Allgemeine Lösung** ist eine Lösungsformel mit freien Konstanten. Erst wenn man den Konstanten Werte zuweist, erhält man eine zeichenbare Kurve. Z.B. kann niemand die Kurve  $y(x) = Ax^2 + Bx + C$  zeichnen, wenn er die Werte von A, B, C nicht hat.

**Merke: Numerische Lösungen sind immer spezielle Lösungen**

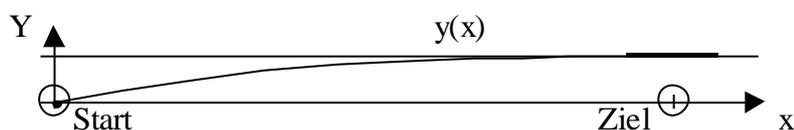
**Anfangswerte:** Die Definitionsformel einer DGL,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

zeigt, dass man zur Berechnung der n-ten Ableitung die Werte von  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  in die Funktion einsetzen muss. Um im Startpunkt die n-te Ableitung  $y^{(n)}$  berechnen zu können, muss man demnach Werte für  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  vorgeben.

Beispiel senkrechter Wurf: Startzeit  $x_0 = 0$ , Starthöhe  $y_0$ , Startgeschwindigkeit  $y'_0$ .

**Randwerte** oder **Randbedingungen:** So nennt man zusätzliche Forderungen an die Lösungsfunktion im Zielpunkt, z.B.  $y'(x=1)$  soll Null sein, d.h., die Lösungskurve  $y(x)$  dort waagrecht verlaufen.



**Satz 1: Die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung hat n Integrationskonstanten (freie Konstanten). Deren Werte ergeben sich für eine spezielle Lösung aus den Anfangswerten**

Beispiel: Senkrechter Wurf

Die DGL ist

$$m \ddot{y}(t) = -m \cdot g$$

Trägheitskraft = Schwerkraft

Wir kürzen die Masse  $m$  heraus und erhalten die noch einfachere DGL  $\ddot{y}(t) = -g$ .

1. Integration  $\int \ddot{y}(t) dt = \int -g dt \Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + C_1$

2. Integration  $\int \dot{y}(t) dt = \int (-gt + C_1) dt \Rightarrow y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$

Die allgemeine Lösung ist  $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$

Wie hängen  $C_1$  und  $C_2$  mit den Startwerten zusammen? Wir geben folgende Startwerte vor:

Startzeit  $t_0 = 0$ , Starthöhe  $y_0 = 5$  [m], Startgeschwindigkeit  $\dot{y}_0 = 10$  [m/s].

Wir setzen die Startwerte  $t_0 = 0$  und  $y_0 = 5$  in die allgemeine Lösung ein:

$$5 = -\frac{g}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 5 \quad C_2 \text{ ist demnach die Starthöhe}$$

Wir setzen die Startwerte  $t_0 = 0$  und  $\dot{y}_0 = 10$  in die 1. Ableitung der allgemeinen Lösung ein:

$$10 = -g \cdot 0 + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 10 \text{ ist Startgeschwindigkeit}$$

In diesem Sonderfall sind Startwerte und Integrationskonstanten sogar identisch. Das ist eher selten der Fall.

**Satz 2:** Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL ist die Summe aus allgemeiner homogener Lösung und einer speziellen inhomogenen Lösung.

**Satz 3:** Sind  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  linear unabhängige spezielle homogene Lösungen, dann ist die allgemeine homogene Lösung  $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$  mit beliebigen reellen oder komplexen Konstanten  $C_1, C_2$  (bei einer DGL 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten als Beispiel)

**Satz 4:** Ist eine komplexe homogene Lösung einer DGL 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $y_{hom} = y_1(x) + i \cdot y_2(x)$  dann ist die allgemeine reelle homogene Lösung  $y_{hom, reell} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Was heißt hier **linear unabhängig**? Zwei Funktionen heißen linear unabhängig, wenn für keine Konstante  $C$  gilt

$$y_1(x) = C \cdot y_2(x)$$

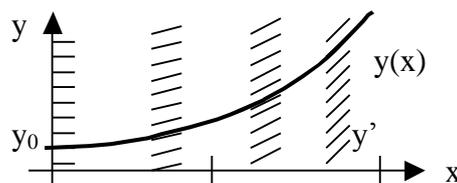
Z.B. sind die Funktionen  $y_1 = 3 \sin(\omega t)$  und  $y_2 = -\sin(\omega t)$  linear abhängig, da gilt  $y_1 = -3 y_2$

## 6.4 Das einfache Integral

Beispiel  $y' = 2x$  oder  $dy/dx = 2x$

oder  $dy = 2x dx$

oder  $\int dy = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C$



Zum Zeichnen denkt man sich die ganze x-y-Ebene mit kleinen Linien bedeckt, deren Anstieg jeweils dem Anstieg  $y' = 2x$  entspricht. Dann startet man beim Anfangswert  $y_0$  und folgt den kleinen Richtungslinien. Auf diese Weise entsteht die Lösungsparabel. Auch hier gilt

$$y_0 = C, \text{ was aus } y = x^2 + C \text{ für } x = 0 \text{ folgt}$$

## 6.5 Methode Trennung der Variablen

Diese Methode ist gut geeignet für DGL des Typs  $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$  mit  $g(y) \neq 0$ .

**Beispiel 1:**  $y'(x) = 1 \cdot y(x)$  mit  $f(x) = 1$ .

Diese DGL ist die Urform der Wachstums-DGL, denn die Änderung pro Zeiteinheit  $y'$  der Hefemenge ist (zumindest in der Wachstumsphase) proportional zur Menge  $y$  der vorhandenen Hefe.

$$(14.5.1) \quad \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

oder integriert

$$\ln |y| = x + C$$

Da die Integrationskonstante frei wählbar ist, nehmen wir  $\ln |C^*|$  statt  $C$  und erhalten nach dem Potenzieren der beiden Seiten von Gl. (14.5.1) die Wachstumskurve  $e^x$ .

$$|y| = e^{x + \ln |C^*|} \Rightarrow \pm y = e^{x + \ln |C^*|} \Rightarrow y = \pm C^* e^x$$

Da die Konstante  $\pm C^*$  immer noch beliebig und frei wählbar ist, setzen wir sie gleich einer beliebigen Konstanten  $K$  und erhalten so die endgültige Form unserer Lösung

$$y(x) = K e^x$$

**Beispiel 2:**  $x + y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y' = (-x) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$

oder

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y dy = -x dx \Rightarrow \int y dy = - \int x dx$$

oder

$$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow y^2 + x^2 = 2C$$

Das ist die Kreisgleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt  $0$  und Radius  $r = \sqrt{2C}$ . Diese abgefahrene Lösung traut man der simplen DGL oben überhaupt nicht zu.

**Beispiel 3:**  $y' + f(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -f(x) dx$

oder

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + \ln|C^*| = - \int f(x) dx \quad \Rightarrow \quad y = C e^{-\int f(x) dx}$$

$C^*$  bzw.  $C$  sind beliebige frei wählbare Integrationskonstanten, die erst bei einer speziellen Lösung wichtig werden.

Wir nehmen als konkrete DGL  $x^2 y' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y' + \frac{1}{x^2} y = 0.$

Das ist genau der Typ  $y' + f(x) y = 0$  mit der Lösung  $y = C e^{-\int f(x) dx}$

Wir müssen demnach nur  $f(x) = 1/x^2$  integrieren und in die Lösungsformel einsetzen.

Es ist  $\int \frac{1}{x^2} dx = \int (x^{-2}) dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right] \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}.$

Eingesetzt in die Lösungsformel erhalten wir die Lösung  $y = C e^{\frac{1}{x}}$

Um in einer konkreten Anwendung dieser DGL die Konstante  $C$  zu bestimmen, reicht es einen Startwert festzulegen, z.B.  $y_1 = 5$  bei  $x = 1$ . (Startwerte für  $x = 0$  verbieten sich hier). Eingesetzt in die Lösungsfunktion der DGL erhalten wir

$$5 = C e^1 \quad \rightarrow \quad C = 5/e \quad \rightarrow \quad C = 1,8394$$

## 6.6 Methode separable DGL mit Trennung der Variablen

Gut geeignet für DGL des Typs  $y' = f(ax + by + c)$  (14.6.1)

Wir machen die Substitution  $u = ax + by + c$

Die Größe  $u$  hängt einmal direkt von  $x$  ab, aber da ja die Lösungsfunktion  $y(x)$  auch von  $x$  abhängt, ist  $u$  ebenfalls eine Funktion von  $x$ , d.h., wir können  $u(x)$  schreiben. Damit ist

$$u' = a + b y' \quad \text{mit} \quad y' = f(u) \quad \text{laut DGL oben.}$$

Man löst diese DGL  $u' = a + b y'$  und setzt die Lösung in Gl. (14.6.1) ein.

Beispiel:  $y' = 2x - y$  d.h.  $u = 2x - y$  und  $u' = 2 - y'$  oder  $y' = 2 - u'$

Eingesetzt in  $y' = 2x - y$  gibt  $2 - u' = 2x - y$  oder  $2 - u' = u$

oder  $-u' = u - 2$  oder  $-\frac{du}{dx} = u - 2$  oder  $\frac{du}{u-2} = -dx \Rightarrow \int \frac{1}{u-2} du = -\int dx$

oder

$$\ln|u-2| = -x + \ln|C| \quad \rightarrow \quad \ln|u-2| - \ln|C| = -x$$

oder

$$\ln \left| \frac{u-2}{C} \right| = -x \quad \Rightarrow \quad \frac{u-2}{C} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = C e^{-x} + 2$$

Die Rücksubstitution in die Gleichung  $u = 2x - y$  liefert  $2x - y = C e^{-x} + 2$  oder die endgültige Lösung

$$y = 2x - C e^{-x} - 2$$

Diese Lösung lässt sich aber auch recht gut mit dem e-Ansatz oder der Laplace-Transformation erhalten.

## 6.7 Integration einer DGL durch Substitution

Geeignet für den Typ  $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$  Wir substituieren  $u = \frac{y}{x}$

oder

$$y = x \cdot u \quad \rightarrow \text{Produktregel} \rightarrow y' = u + x u' \quad \text{mit } y = y(x) \quad \text{und } u = u(x)$$

eingesetzt in die DGL gibt  $f(u) = u + x u'$  oder  $u' = \frac{f(u) - u}{x}$ .

Jetzt löst man die Gleichung und macht dann eine Rücksubstitution.

Beispiel:  $y'(x) = \frac{x+2y}{x} \Rightarrow y' = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = 1 + 2u$

Wegen  $y' = u + x u' = 1 + 2u$  erhalten wir  $x u' = 1 + u$  oder

$$x \frac{du}{dx} = 1 + u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u+1} du = \int \frac{1}{x} dx$$

oder

$$\ln |u+1| = \ln |x| + \ln |C| \quad \rightarrow \quad \ln |u+1| = \ln |C \cdot x|$$

oder

$$u + 1 = C \cdot x \quad \rightarrow \quad u = C \cdot x - 1.$$

Die Rücksubstitution gibt wegen  $u = \frac{y}{x}$  und daraus  $y = u \cdot x$  das Ergebnis

$$y(x) = (C \cdot x - 1) \cdot x = C x^2 - x$$

Wir machen die Probe:  $y' = 2Cx - 1$  erhalten wir durch Differenzieren der Lösung.

Die Lösungsfunktion  $y = C x^2 - x$  eingesetzt in die DGL  $y' = 1 + 2y/x$  gibt:

$$y' = 1 + 2 \left( \frac{Cx^2 - x}{x} \right) = 1 + 2(Cx - 1) = 1 + 2Cx - 2 = 2Cx - 1,$$

d.h., wir erhalten denselben Ausdruck wie beim Differenzieren.

## 6.8 Methode Variation der Konstanten

Geeignet für die inhomogenen Typen  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

Die homogene Lösung, d.h. die Lösung der homogenen DGL  $y' + f(x) \cdot y = 0$ , war

$$y_{\text{hom}} = C e^{-\int f(x) dx}$$

Wir ersetzen aus didaktischen Gründen das C durch ein K (um im nachfolgenden Text Verwechslungen zu vermeiden.). Variation der Konstanten heißt, dass man Konstante K durch die Funktion K(x) ersetzt.

$$y(x) = K(x) e^{-\int f(x) dx} \quad (14.8.1)$$

Differenziert gibt

$$y'(x) = K'(x) e^{-\int f(x) dx} - K(x) f(x) e^{-\int f(x) dx} .$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL gibt das

$$K'(x) e^{-\int f(x) dx} - K(x) f(x) e^{-\int f(x) dx} + f(x) K(x) e^{-\int f(x) dx} = g(x)$$

Da sich die beiden mittleren Terme wegheben, bleibt eine deutlich kürzere Formel übrig:

$$K'(x) e^{-\int f(x) dx} = g(x) \quad \Rightarrow \quad K'(x) = g(x) e^{+\int f(x) dx} .$$

Integriert ergibt das

$$K(x) = \int \left( g(x) e^{\int f(x) dx} \right) dx + C .$$

Eingesetzt in Gl. (14.8.1) gibt die Lösungsformel für DGL dieses Typs:

$$y(x) = \left( \int \left( g(x) e^{\int f(x) dx} \right) dx + C \right) \cdot e^{-\int f(x) dx} .$$

**Beispiel für diesen Typ einer inhomogenen DGL ist**  $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$

Integral  $f(x)$  ist  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

Die Lösung ist dann  $y(x) = \left( \int \cos(x) e^{\ln|x|} dx + C \right) e^{-\ln|x|}$

oder

$$y(x) = \left( \int (\cos(x) \cdot x) dx + C \right) \cdot \frac{1}{x}$$

Das Integral  $\cos(x) \cdot x$  lösen wir mit der Methode „partielle Integration“ aus Mathe 1. Diese Methode ist die Umkehrung der Produktregel des Differenzierens (Erinnerung!!):

$$\int u' v = uv - \int uv'$$

d. h.

$$\int \cos \cdot x = \sin \cdot x - \int \sin \quad \text{mit} \quad -\int \sin = \cos.$$

Die endgültige Lösung ist demnach  $y(x) = \left( \sin(x) \cdot x + \cos(x) + C \right) \cdot \frac{1}{x}$

## 6.9 Lösung mit e-Ansatz von inhomogenen DGL mit konstanten Koeffizienten

1. Ordnung:  $a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$   $a_0, a_1, a_2, \dots$  gegebene Konstante  
 2. Ordnung:  $a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$

### Schrittfolge des Lösungsweges:

1. Homogene Lösung finden über die Wurzel(n) der charakteristischen Gleichung
2. Eine spezielle inhomogene Lösung finden unter Benutzung einer Tabelle und eines Koeffizientenvergleichs
3. Bestimmung der Konstanten durch Einsetzen der Startwerte in die allgemeine Lösung bzw. in deren Ableitung

### Beispiel 1: Einfache DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$3 y'(x) + 2 y(x) = 4 \cos(x) \quad \text{mit Störfunktion } 4 \cos(x)$$

Wir suchen zuerst mittels e-Ansatz die Lösung der homogenen DGL  $3 y'(x) + 2 y(x) = 0$ .

Der e-Ansatz der homogenen Lösung lautet  $y = C e^{rx}$  mit  $y' = C r e^{rx}$

Eingesetzt in die homogene DGL erhalten wir  $3 C r e^{rx} + 2 C e^{rx} = 0$ .

Wir klammern  $C e^{rx}$  aus und erhalten  $C e^{rx} \cdot (3r + 2) = 0$  mit  $C \neq 0$

Da  $e^{rx}$  nicht 0 werden kann, gilt  $3r + 2 = 0$  (Char. Gl.)  $\rightarrow r = -\frac{2}{3}$

Dieser Wert  $r$  heißt Wurzel der Charakteristischen Gleichung. Wir setzen ihn in den homogenen Lösungsansatz ein und erhalten

$$y_{\text{hom}}(x) = C e^{-(2/3)x}$$

Beim Suchen einer speziellen inhomogenen Lösung ist folgende Tabelle sehr hilfreich:

### Tabelle spezieller inhomogener Lösungsansätze

Typ der Störfunktion		Spezieller inhomogener Lösungsansatz	
Konstante	$k$	Konstante	$K$
Potenz	$k x^n$	Polynom	$K_0 + K_1 x + \dots + K_n x^n$
Sinus	$k \sin(\omega x)$	Sinus und Kosinus	$K_1 \sin(\omega x) + K_2 \cos(\omega x)$
Kosinus	$k \cos(\omega x)$	Sinus und Kosinus	$K_1 \sin(\omega x) + K_2 \cos(\omega x)$
Exponentialfunktion	$k_1 e^{k_2 x}$	Exponentialfunktion	$K_1 e^{k_2 x}$

Die Konstanten  $k$  oder  $k_1$  links können andere Werte haben, als die Konstanten  $K$  bzw.  $K_1$  rechts, während  $k_2$  und  $\omega$  links und rechts gleich sind. Die Konstanten des Lösungsansatzes

werden durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt, indem man den speziellen Lösungsansatz in die inhomogene DGL einsetzt.

Zurück zu unserem Beispiel  $3 y'(x) + 2 y(x) = 4 \cos(x)$ . Die rechte Seite (Störfunktion) dieser DGL ist vom Typ „Kosinus“. Laut Tabelle haben wir den speziellen inhomogenen Lösungsansatz

$$y_{\text{inh spez}}(x) = K_1 \sin(\omega x) + K_2 \cos(\omega x).$$

Und differenziert

$$y'_{\text{inh spez}}(x) = K_1 \cos(\omega x) \cdot \omega - K_2 \sin(\omega x) \cdot \omega.$$

Der Lösungsansatz in die DGL eingesetzt liefert

$$3 K_1 \cos(x) \cdot 1 - 3 K_2 \sin(x) \cdot 1 + 2 K_1 \sin(x) + 2 K_2 \cos(x) = 4 \cos(x)$$

Da wir zwei Konstanten,  $K_1$  und  $K_2$ , zu bestimmen haben, benötigen wir auch zwei Gleichungen. Diese beiden Gleichungen liefert uns der **Koeffizientenvergleich**, indem wir einmal die Kosinuse der linken Seite mit denen der rechten Seite vergleichen, und dann dasselbe mit den Sinussen links und rechts machen:

$$3 K_1 \cos(x) + 2 K_2 \cos(x) = 4 \cos(x) \quad \rightarrow \quad (3 K_1 + 2 K_2) \cos(x) = 4 \cdot \cos(x)$$

$$-3 K_2 \sin(x) + 2 K_1 \sin(x) = 0 \quad \rightarrow \quad (-3 K_2 + 2 K_1) \sin(x) = 0 \cdot \sin(x)$$

Da  $\cos(x)$  bzw.  $\sin(x)$  jeweils links und rechts in der Gleichung als Faktor auftritt, kürzen sich diese Funktionen heraus, und es bleibt ein einfaches Gleichungssystem mit 2 Unbekannten übrig:

$$\begin{aligned} 3 K_1 + 2 K_2 &= 4 \\ 2 K_1 - 3 K_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ein so kleines Gleichungssystem lösen wir, indem wir eine Gleichung in die andere einsetzen. Hier bietet es sich an, die zweite Gleichung in die erste einzusetzen:

$$2 K_1 - 3 K_2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2 K_1 = 3 K_2 \quad \rightarrow \quad K_1 = \frac{3}{2} K_2$$

eingesetzt in die erste Gleichung gibt

$$3 \cdot \frac{3}{2} K_2 + 2 K_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4,5 K_2 + 2,0 K_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 6,5 K_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 0,615$$

und mit  $K_1 = \frac{3}{2} K_2$  für  $K_1$  den Wert  $K_1 = 1,5 \cdot 0,615 = 0,923$ .

Die spezielle inhomogene Lösung lautet somit in ihrer vollständigen Form

$$y_{\text{inh spez}}(x) = 0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x).$$

Nach **Satz 2** ist dann die allgemeine inhomogene Lösung die Summe aus der allgemeinen homogenen Lösung und unserer speziellen inhomogenen Lösung, also:

$$y(x) = C e^{-(2/3)x} + 0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x).$$

Wollen wir eine Lösungskurve berechnen oder zeichnen, dann müssen wir einen Startwert vorgeben. Wir wählen als Startwert für  $y(x)$  den Wert  $y_0 = 1$  bei  $x_0 = 0$ . Wir setzen die beiden Werte in die allgemeine inhomogene Lösung ein:

$$1 = C e^{-(2/3) \cdot 0} + 0,923 \sin(0) + 0,615 \cos(0).$$

Wegen  $e^0 = 1$  und  $\sin(0) = 0$  und  $\cos(0) = 1$  erhalten wir

$$1 = C \cdot 1 + 0,923 \cdot 0 + 0,615 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad 1 = C + 0,615$$

oder

$$C = 0,385$$

Die zeichenbare oder tabellierbare Anfangswertlösung zur allgemeinen inhomogenen Lösung lautet somit:

$$y(x) = 0,385 e^{-(2/3)x} + 0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x).$$

Betrachten wir die Lösungsformel, dann fällt folgendes auf: Die Lösung besteht aus zwei Teilen, die sich unterschiedlich verhalten:

1. Der Teil  $0,385 e^{-(2/3)x}$  ist eine fallende e-Funktion, die schon für Werte um  $x = 10$  sehr klein ist und rasch gegen Null geht. Dieser Anteil der Lösung, der aus der homogenen DGL hervorgeht, beschreibt das **Eigenverhalten** des durch die DGL beschriebenen physikalischen, biologischen oder technischen Systems, wenn es angestoßen wird (Startwert), aber weiter keine Störung erfolgt.
2. Der Teil  $0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x)$  ist eine phasenverschobene und in der Amplitude veränderte Kopie der Störfunktion  $4 \cos(x)$ . Dieser inhomogene Teil der Lösung beschreibt die Lösung, die nach Beendigung des Einschwingvorgangs übrig bleibt, nämlich die **fortdauernde zwanghafte Bewegung** des Systems auf Grund der fortdauernden Störung.

**Beispiel 2: Eine DGL zweiter Ordnung mit 2 reellen Wurzeln (nicht schwingendes System).**

$$2 \ddot{x}(t) + 7 \dot{x}(t) + x(t) = 3t$$

Der e-Ansatz der homogenen Lösung ist

$$x(t) = C e^{rt}, \quad \dot{x}(t) = C r e^{rt}, \quad \ddot{x}(t) = C r^2 e^{rt}$$

Eingesetzt in die homogene Lösung  $2 \ddot{x}(t) + 7 \dot{x}(t) + x(t) = 0$  und Faktor  $C e^{rt}$  ausgeklammert, erhalten wir die charakteristische Gleichung dieser homogenen DGL:

$$2r^2 + 7r + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 + (7/2)r + (1/2) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 + pr + q = 0$$

Mit  $p = (7/2)$  und  $q = (1/2)$  liefert uns die p-q-Formel die beiden Wurzeln:

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -1,75 \pm \sqrt{1,75^2 - 0,5} = -1,75 \pm 1,60$$

oder  $r_1 = -0,15$  und  $r_2 = -3,35$ .

Damit lautet die allgemeine homogene Lösung  $x_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-0,15t} + C_2 e^{-3,35t}$ .

Laut Tabelle der speziellen inhomogenen Lösungsansätze ist der Typ unserer Störfunktion  $3t$  ein Polynom und der spezielle inhomogene Lösungsansatz damit

$$x_{\text{spez., inhom}}(t) = K_0 + K_1 t \quad \text{mit den Ableitungen} \quad \dot{x}(t) = K_1 \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = 0$$

Eingesetzt in die DGL erhalten wir die Gleichung  $2 \cdot 0 + 7 \cdot K_1 + K_0 + K_1 t = 3t$

Hier wird der Koeffizientenvergleich links und rechts für die Koeffizienten der  $t$ -Potenzen durchgeführt. Da es in diesem Beispiel nur zwei  $t$ -Potenzen gibt, nämlich  $t^1 = t$  und  $t^0 = 1$ , erhalten wir die beiden einfachen Gleichungen für unsere unbekanntenen Konstanten  $K_0$  und  $K_1$ :

$$(7K_1 + K_0) \cdot t^0 = 0 \cdot t^0 \quad \text{oder} \quad 7K_1 + K_0 = 0$$

$$1K_1 \cdot t^1 = 3 \cdot t^1 \quad \text{oder} \quad K_1 = 3$$

Die zweite Gleichung  $K_1 = 3$  in die erste Gleichung  $7K_1 + K_0 = 0$  eingesetzt, liefert

$$K_0 = -7 \cdot 3 = -21.$$

Die spezielle inhomogene Lösung ist damit  $x_{\text{spez., inhom}}(t) = -21 + 3t$ .

Nach **Satz 2** ist dann die allgemeine inhomogene Lösung die Summe aus der allgemeinen homogenen Lösung und unserer speziellen inhomogenen Lösung, also:

$$x(t) = C_1 e^{-0,15t} + C_2 e^{-3,35t} - 21 + 3t.$$

Wollen wir eine Lösungskurve berechnen oder zeichnen, dann müssen wir Startwerte vorgeben. Wir wählen als Startwert für  $x(t_0=0)$  den Wert  $x_0 = 5$  und die Startgeschwindigkeit  $\dot{x}_0 = 10$ . Wir setzen die beiden Werte  $t_0$  und  $x_0$  in die allgemeine inhomogene Lösung ein:

$$5 = C_1 e^{-0,15 \cdot 0} + C_2 e^{-3,35 \cdot 0} - 21 + 3 \cdot 0$$

und wegen  $e^0 = 1$

$$5 = C_1 + C_2 - 21$$

oder

$$C_1 + C_2 = 26$$

Damit haben wir aber erst eine Gleichung für die beiden Unbekannten  $C_1$  und  $C_2$ . Deshalb setzen wir die Startgeschwindigkeit  $\dot{x}_0 = 10$  und  $t_0=0$  in die 1. Ableitung der allgemeinen inhomogenen Lösung ein:

$$\dot{x}(t) = -0,15 C_1 e^{-0,15t} - 3,35 C_2 e^{-3,35t} + 3,$$

und erhalten wieder wegen  $e^0 = 1$

$$10 = -0,15 C_1 - 3,35 C_2 + 3 \quad \text{oder} \quad -0,15 C_1 - 3,35 C_2 = 7.$$

Damit haben wir wieder ein kleines Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 &= 26 \\ -0,15 \cdot C_1 - 3,35 \cdot C_2 &= 7. \end{aligned}$$

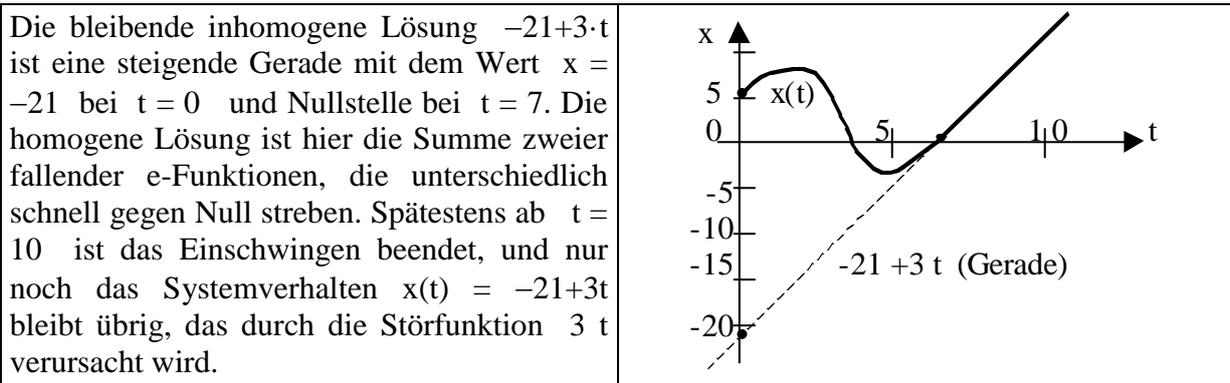
Wir stellen Gleichung 1 um und erhalten  $C_1 = 26 - C_2$ . Das in die 2. Gl. Eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} -0,15 \cdot (26 - C_2) - 3,35 \cdot C_2 &= 7 \quad \rightarrow \quad -3,9 + 0,15 C_2 - 3,35 C_2 = 7 \\ \text{oder} \\ -3,2 C_2 &= 10,9 \quad \rightarrow \quad C_2 = -3,406 \end{aligned}$$

$$\text{und mit } C_1 = 26 - C_2 \quad \rightarrow \quad C_1 = 29,406$$

Die zeichenbare oder tabellierbare spezielle Lösung zur allgemeinen inhomogenen Lösung lautet somit:

$$x(t) = 29,406 e^{-0,15t} - 3,406 e^{-3,35t} - 21 + 3t.$$



**Beispiel 3: Eine DGL zweiter Ordnung mit reeller Doppelnullstelle (nicht schwingendes System).**

$$z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 5e^{0,2x}$$

Charakteristische Gleichung ist

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = -1$$

mit der Doppelwurzel bei  $r = -1$ .

**Satz 5:** Hat die charakteristische Gleichung der homogenen Lösung Mehrfachwurzeln, dann gewinnt man weitere linear unabhängige Lösungsansätze durch Multiplikation des einfachen e-Ansatzes mit den Potenzen der unabhängigen Variablen bis zur (n-1)-ten Potenz, wenn n die Vielfachheit der Wurzel ist.

Bei einer DGL 2. Ordnung benötigen wir einen Ansatz mit 2 linear unabhängigen e-Termen. Diese sind nach Satz 5 dann  $C_1 e^{-1 \cdot x}$  und  $C_2 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x}$  und die allgemeine homogene Lösung damit

$$z_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{-1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x} .$$

Laut Tabelle der speziellen inhomogenen Lösungsansätze ist die Störfunktion vom Typ "Exponentialfunktion"  $k_1 e^{k_2 x}$  mit dem Lösungsansatz  $K_1 e^{k_2 x}$ . Die Konstante  $k_2=0,2$  übernehmen wir direkt aus der Störfunktion, während wir den Wert der Konstanten  $K_1$  noch durch den Koeffizientenvergleich bestimmen müssen.

$$z_{\text{spez, inh}}(x) = K_1 e^{0,2 x} \quad \text{mit} \quad z'(x) = 0,2 K_1 e^{0,2 x} \quad \text{und} \quad z''(x) = (0,2)^2 K_1 e^{0,2 x} .$$

Den Ansatz und seine Ableitungen setzen wir in die inhomogene DGL

$$z''(x) + 2 z'(x) + z(x) = 5 e^{0,2 x} \quad \text{ein und erhalten}$$

$$0,04 K_1 e^{0,2 x} + 0,4 K_1 e^{0,2 x} + K_1 e^{0,2 x} = 5 e^{0,2 x} \quad \rightarrow \quad (0,04+0,4+1) K_1 = 5$$

oder

$$K_1 = 5 / 1,44 = 3,472 .$$

Damit ist die allgemeine Lösung  $z(x) = C_1 e^{-1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x} + 3,472 e^{0,2 x} .$

Eine zeichenbare oder tabellierbare Lösung benötigt bei einer DGL 2. Ordnung zwei Startwerte. Wir nehmen bei  $x_0=0$  Starthöhe  $z_0=5$  und Startgeschwindigkeit  $z'_0=-8$ .

Setzen wir  $x_0=0$  und  $z_0=5$  in die allgemeine inhomogene Lösung ein, erhalten wir wegen  $e^0=1$

$$5 = C_1 + C_2 \cdot 0 + 3,472 \quad \rightarrow \quad C_1 = 5 - 3,472 = 1,528$$

Setzen wir  $x_0=0$  und  $z'_0=-8$  in die 1. Ableitung der allgemeinen inhomogenen Lösung,  $z'(x) = -1 \cdot C_1 e^{-1 \cdot x} + C_2 \cdot (e^{-1 \cdot x} - x \cdot e^{-1 \cdot x}) + 0,2 \cdot 3,472 e^{0,2 x}$  ein, erhalten wir

$$-8 = -C_1 + C_2 + 0,6944$$

und mit  $C_1 = 1,528$

$$C_2 = C_1 - 8 - 0,6944 = -7,166 .$$

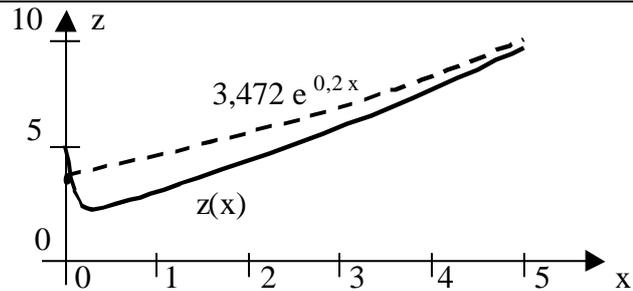
Damit lautet die zeichenbare oder tabellierbare inhomogene Lösung für unsere Startwerte

$$z(x) = 1,528 e^{-1 \cdot x} - 7,166 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x} + 3,472 e^{0,2 x} .$$

Wir machen uns eine kleine Wertetabelle zum Zeichnen:

x	$1,528 e^{-x}$	$-7,166 \cdot x \cdot e^{-x}$	$3,427 e^{0,2 x}$	z(x)
0	1,528	0	3,427	5,000
1	0,562	-2,636	4,241	2,167
2	0,206	-1,939	5,179	3,446
3	0,076	-1,070	6,326	5,332
5	0,010	-0,241	9,437	9,206

Die bleibende inhomogene Lösung  $3,472e^{0,2x}$  ist eine steigende e-Kurve mit dem Wert  $z = 3,472$  bei  $x = 0$ . Die homogene Lösung ist auch hier die Summe zweier fallender e-Funktionen, die unterschiedlich schnell gegen Null gehen. Für  $x > 10$  ist das Einschwingen beendet. Das Systemverhalten  $3,427 \cdot e^{0,2x}$  bleibt übrig, das durch die Störfunktion  $5 \cdot e^{0,2x}$  verursacht wird.



#### Beispiel 4: DGL zweiter Ordnung mit einem konjugiert-komplexen Nullstellenpaar (schwingendes Verhalten)

$$\ddot{x}(t) + 3 \dot{x}(t) + 5 x(t) = 4 \sin(2t) \quad \text{mit der Störfunktion } 4 \sin(2t)$$

Die charakteristische Gleichung  $r^2 + 3r + 5 = 0$  führt auf das konjugiert-komplexe Nullstellenpaar

$$r_{1,2} = -1,5 \pm \sqrt{(-1,5)^2 - 5} = -1,5 \pm 1,658 i$$

Der e-Ansatz  $x(t) = C e^{rt}$  führt auf eine erste Form der homogenen Lösung

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{(-1,5 + 1,658 i)t} + C_2 e^{(-1,5 - 1,658 i)t}$$

Wegen  $e^{(-1,5 + 1,658 i)t} = e^{-1,5 t} \cdot e^{+1,658 i t}$  bzw.  $e^{(-1,5 - 1,658 i)t} = e^{-1,5 t} \cdot e^{-1,658 i t}$

können wir den Dämpfungsterm  $e^{-1,5 t}$  ausklammern. Außerdem gelten nach Euler die beiden Formeln  $e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  und  $e^{-\alpha i} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ . Damit kommen wir zu einer weiteren, aber noch nicht endgültigen Form der homogenen Lösung.

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-1,5 t} ( C_1 ( \cos(1,658 t) + i \sin(1,658 t) ) + C_2 ( \cos(1,658 t) - i \sin(1,658 t) ) )$$

Wir fassen die Kosinus- und die Sinusterme zusammen:

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-1,5 t} ( (C_1 + C_2) \cos(1,658 t) + (C_1 - C_2) i \sin(1,658 t) )$$

Da die Klammern  $(C_1 + C_2)$  und  $(C_1 - C_2)$  beliebige Konstanten enthalten, können wir sie auch in  $A$  und  $B$  umbenennen. Eine weitere Vereinfachung offeriert uns der **Satz 4**, der sagt, dass wir für eine reelle Lösung einfach das „i“ weglassen dürfen. Damit erhalten wir die für uns endgültige Form der allgemeinen homogenen Lösung

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-1,5 t} ( A \cos(1,658 t) + B \sin(1,658 t) )$$

Die vielen Umformungen nach der Berechnung der Nullstellen bis zur endgültigen homogenen Lösung lässt man später einfach weg.

Eine spezielle inhomogene Lösung finden wir mit der Tabelle der speziellen inhomogenen Lösungsansätze. Die Störfunktion ist vom Typ „Sinus“. Der zugehörige Ansatz ist

$$x_{\text{spez, inh}}(t) = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$$

mit den Ableitungen

$$\dot{x}_{\text{spez, inh}}(t) = K_1 \cos(\omega t) \omega - K_2 \sin(\omega t) \omega$$

und

$$\ddot{x}_{\text{spez, inh}}(t) = -K_1 \sin(\omega t) \omega^2 - K_2 \cos(\omega t) \omega^2$$

Um die Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  zu bestimmen, setzen wir  $x_{\text{spez, inh}}(t)$  und seine Ableitungen in die inhomogene DGL  $\ddot{x}(t) + 3 \dot{x}(t) + 5x(t) = 4 \sin(2t)$  ein.

Für  $\omega$  übernehmen wir den Wert  $\omega = 2$  aus der Störfunktion.

$$\begin{aligned} & -K_1 \sin(2t) \cdot 2^2 - K_2 \cos(2t) \cdot 2^2 + \\ & 3(K_1 \cos(2t) \cdot 2 - K_2 \sin(2t) \cdot 2) + \\ & 5(K_1 \sin(2t) + K_2 \cos(2t)) = 4 \sin(2t) \end{aligned}$$

Sortiert nach Sinus- und Kosinustermen erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(2t) \cdot (-4K_1 - 6K_2 + 5K_1) + \\ \cos(2t) \cdot (-4K_2 + 6K_1 + 5K_2) = 4 \sin(2t) . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich lautet demnach

$$1 \cdot K_1 - 6 \cdot K_2 = 4 \quad (\text{Koeffizienten des Sinus})$$

$$6 \cdot K_1 + 1 \cdot K_2 = 0 \quad (\text{Koeffizienten des Kosinus})$$

Aus Gleichung 2 folgt  $K_2 = -6 \cdot K_1$ . Das in die 1. Gleichung eingesetzt, liefert

$$1 \cdot K_1 - 6(-6 \cdot K_1) = 4 \quad \rightarrow \quad 37K_1 = 4 \quad \rightarrow \quad K_1 = 0,108 ,$$

und aus  $K_2 = -6 \cdot K_1$  folgt dann  $\rightarrow K_2 = -0,648$ .

Damit lautet die allgemeine inhomogene Lösung dieser DGL

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-1,5t} ( A \cos(1,658t) + B \sin(1,658t) ) + \\ 0,108 \sin(2t) - 0,648 \cos(2t) . \end{aligned}$$

Die Eigenfrequenz des Oszillators ist  $\omega_0 = 1,658$ , die Frequenz der Störfunktion und damit der aufgezungenen Schwingung ist  $\omega_s = 2,0$ . Die Eigenschwingung klingt mit der Dämpfung  $e^{-1,5t}$  ab. Was bleibt, ist eine erzwungene gleichförmige Schwingung der Frequenz  $\omega_s = 2,0$ . Diese Schwingung ist jedoch gegenüber der Störfunktion  $4 \sin(2t)$

phasenverschoben, was man am Kosinusanteil erkennt, und die Amplitude ist nicht 4, sondern  $\sqrt{(0,108)^2 + (-0,648)^2} = 0,657$ .

Geben wir Startwerte vor, dann sind damit auch die bisher noch frei verfügbaren Konstanten A und B festgelegt. Wir geben die Startzeit  $t_0 = 0$ , die Startauslenkung  $x_0 = 1$  und die Startgeschwindigkeit  $\dot{x}_0 = -1$  vor. Zuerst setzen wir  $t_0 = 0$  und  $x_0 = 1$  in die allgemeine inhomogene Lösung ein. Wir erhalten

$$1 = e^0 ( A \cos(0) + B \sin(0) ) + 0,108 \sin(0) - 0,648 \cos(0).$$

Wegen  $e^0 = 1$ ,  $\cos(0) = 1$  und  $\sin(0) = 0$  erhalten wir die einfache Gleichung

$$1 = A - 0,648 \quad \rightarrow \quad A = 1,648.$$

Jetzt setzen wir  $t_0 = 0$  und  $\dot{x}_0 = -1$  in die erste Ableitung der allgemeinen inhomogenen Lösung ein. Diese lautet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -1,5 e^{-1,5 t} ( A \cos(1,658 t) + B \sin(1,658 t) ) + \\ & e^{-1,5 t} ( -A \sin(1,658 t) \cdot 1,658 + B \cos(1,658 t) \cdot 1,658 ) + \\ & 0,108 \cos(2 t) \cdot 2 + 0,648 \sin(2 t) \cdot 2. \end{aligned}$$

Wegen  $e^0 = 1$ ,  $\cos(0) = 1$  und  $\sin(0) = 0$  erhalten wir

$$-1 = -1,5 A + 1,658 B + 0,216$$

und mit  $A = 1,648$  vom ersten Einsetzen oben  $1,658 B = -1 + 1,5 \cdot 1,648 - 0,216$  oder

$$B = 0,757.$$

Damit lautet die inhomogene Startwertelösung

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{-1,5 t} ( 1,648 \cos(1,658 t) + 0,757 \sin(1,658 t) ) + \\ & 0,108 \sin(2 t) - 0,648 \cos(2 t). \end{aligned}$$

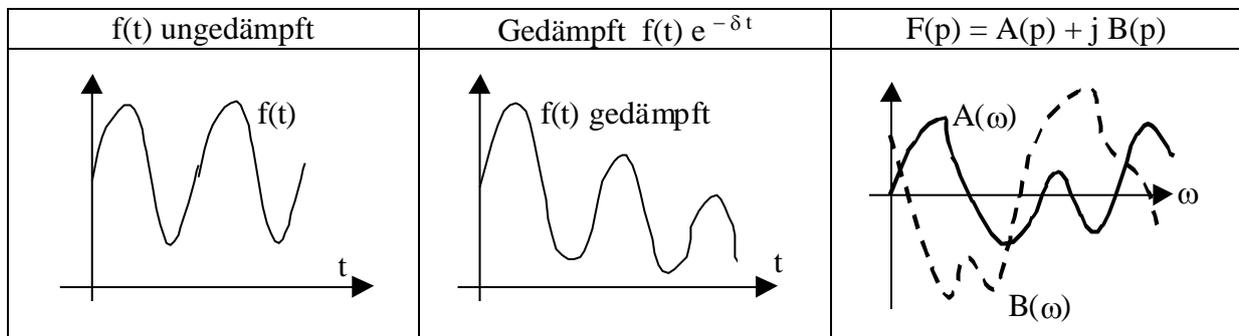
## 7. Laplace - Transformation

Pierre-Simon Marquis de Laplace, 1749-1827, französischer Astronom und Mathematiker, erklärte die Bahn des Erdmondes und der Planeten und ihre gegenseitigen Störungen. Er gilt als Entwickler des wichtigen mathematischen Hilfsmittels der Laplace-Transformation. Diese ist aus der Physik, Elektronik und Regelungstechnik nicht wegzudenken.

- Viele Probleme, z.B. die Stabilität einer Regelung, werden mit der Laplace-Transformation sichtbar gemacht und / oder verbessert.

- Bei der Lösung von DGL mit der Laplace-Transformation müssen nur **linksseitige Anfangswerte** berücksichtigt werden. Das ist hilfreich bei **sogenannten sprungfähigen Systemen**.

Die Laplace-Transformierte  $F(p)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$  ist das kontinuierliche Frequenzspektrum der gedämpften Zeitfunktion für alle möglichen Dämpfungen  $\delta$ . Laplace hatte erkannt, dass man besonders für periodische Funktionen, wie Sinus oder Kosinus, kein kontinuierliches Frequenzspektrum berechnen kann, da dieses von der oberen Integrationsgrenze abhängen würde. Das Integral über den Sinus z.B. ist der Kosinus, und der wechselt ständig immer zwischen  $-1$  und  $+1$ , und es wäre totaler Unsinn, ihm einen Wert zuzuschreiben. Das sieht jedoch anders aus mit einer exponentiellen Dämpfung der Funktion. Die Amplituden des Sinus werden immer kleiner, leisten immer weniger Beitrag zum Integral, und plötzlich lässt sich ein Wert bestimmen. Das hat Laplace vor 200 Jahren erkannt und darauf seine Theorie aufgebaut.



In der komplexen Größe  $p$  steckt als Realteil die Dämpfung  $\delta$  und als Imaginärteil die Kreisfrequenz  $\omega$ , d.h.

$$p = \delta + j \omega \quad (\text{Elektrotechniker sagen } j \text{ statt } i)$$

Erinnerung! Nach Euler ist  $e^{\delta + j\omega} = e^{\delta} \cdot e^{j\omega} = e^{\delta} \cdot (\cos(\omega) + j \sin(\omega))$

Die Kurven  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  als Bestandteil der Laplacetransformierten  $F(p)$  für eine bestimmte Dämpfung  $\delta$  sind also nichts weiter als das Kosinus- bzw. das Sinusspektrum, das in der gedämpften Kurve  $f(t) e^{-\delta t}$  steckt.

Die Laplace-Transformation ist eine Integralformel. Man kann vom Zeitbereich in den Bildbereich transformieren, was auch dem Laien bei einigen Funktionen gelingt, man kann aber auch zurück transformieren, was geschulten Funktionentheoretikern vorbehalten ist.

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \leftarrow \rightarrow & F(p) \\ \text{Zeitbereich} & & \text{Bildbereich (Frequenzbereich)} \end{array}$$

Die Laplace-Transformation vom Zeitbereich in den Bildbereich erfolgt mit der Formel

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Die Laplacetransformierten  $F(p)$  zu vielen Zeitfunktionen  $f(t)$  stehen in sogenannten Korrespondenztafeln, z.B. bei Makarov. So ist die Laplacetransformierte  $F(p)$  der Rampenfunktion

$$f(t) = t \quad \rightarrow \quad F(p) = 1 / p^2 .$$

### 7.1 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Linearität  $a f_1(t) + b f_2(t) \quad \leftrightarrow \quad a F_1(p) + b F_2(p)$

Differenziation  $\dot{f}(t) \quad \leftrightarrow \quad p F(p) - f(-0)$

$\ddot{f}(t) \quad \leftrightarrow \quad p^2 F(p) - p f(-0) - \dot{f}(-0)$

$f(-0)$  und  $\dot{f}(-0)$  sind *linksseitige Anfangswerte* (wichtig bei Sprungfunktionen)

Integration  $\int_0^t f(\tau) d\tau \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{p} F(p)$

Zeitliche Verschiebung  $f(t - t_0) \quad \leftrightarrow \quad F(p) e^{-p t_0}$

Endwertsatz  $f(t \rightarrow \infty) \quad \leftrightarrow \quad \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$

Anfangswertsatz  $f(+0) \quad \leftrightarrow \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$

Faltung  $\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad \leftrightarrow \quad F_1(p) F_2(p)$

Die Faltung ist ein wichtiges Integral für die Berechnung der Systemantwort auf eine beliebige Störung  $f_2(t)$ .

#### Korrespondenztabelle $f(t) \leftrightarrow F(p)$

Zeitbereich	$f(t)$	Bildbereich	$F(p)$
Einheitsimpuls	$\delta(t)$		1
Einheitssprung	$1(t)$		$1/p$
Rampe	$t$		$1/p^2$
Potenz	$t^n$		$n! / (p^{n+1})$
Entladekurve	$e^{-at}$		$1 / (p+a)$
Aufladekurve	$1 - e^{-at}$		$a / (p(p+a))$
$t \cdot$ Entladekurve	$t e^{-at}$		$1 / (p+a)^2$
Dämpfungssatz	$e^{-at} f(t)$		$F(p+a)$
Sinus	$(1/a) \cdot \sin(at)$		$1 / (p^2 + a^2)$
Kosinus	$\cos(at)$		$p / (p^2 + a^2)$
gedämpfter Sinus	$e^{-\delta t} \sin(\omega t)$		$\omega / ((p+\delta)^2 + \omega^2)$
gedämpfter Kosinus	$e^{-\delta t} \cos(\omega t)$		$(p+\delta) / ((p+\delta)^2 + \omega^2)$
Sinus hyperbolicus	$(1/a) \cdot \sinh(at)$		$1 / (p^2 - a^2)$
Kosinus hyperbolicus	$\cosh(at)$		$p / (p^2 - a^2)$

( Manche Mathematiker verwenden statt des Buchstabens **p** das **s** . Die Bedeutung ist dieselbe. Es gibt natürlich weit umfangreichere Korrespondenztafeln. )

## 7.2 Partialbruchzerlegung

Das Lösen einer DGL mit der Laplace-Transformation erfolgt in den drei Schritten:

1. Transformation der DGL und der Störfunktion in den Bildbereich mittels Korrespondenztafel
2. Auflösung der im Schritt 1 entstandenen algebraischen Gleichung nach  $x$
3. Rücktransformation der Gleichung für  $x$  in den Zeitbereich wieder mittels der Korrespondenztafel. Dafür vereinfacht man den Ausdruck mittels Partialbruchzerlegung. (Auch der Faltungssatz wird gelegentlich verwendet.)

Die Hintransformation in den Bildbereich und das Auflösen nach  $x$  sind nicht sehr schwer. Man muss dazu weder differenzieren noch integrieren können. Aber die Rücktransformation erfordert einiges Geschick, vor allem die Zerlegung komplizierter Brüche in eine Summe kleinerer Brüche, die man dann in der Korrespondenztafel wiederfindet. Dazu dient die Partialbruchzerlegung.

Der Bruch  $\frac{h(p)}{g(p)}$  soll in eine Summe einfacher Brüche zerlegt werden, z.B. um die Rücktransformation mit der Korrespondenztafel zu ermöglichen. Als Beispiel nehmen wir den Bruch

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} \quad \text{mit den beiden gegebenen Konstanten } K \text{ und } T_1 .$$

**Schritt 1:** Bestimme alle einfachen bzw. mehrfachen reellen Nullstellen bzw. konjugiert-komplexe Nullstellenpaare des Nenners. Dazu formen wir um:

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} \Rightarrow \frac{K/T_1}{p(1/T_1 + p)}$$

Jetzt erkennen wir die 2 Nullstellen des Nenners zu  $p_1 = 0$  und  $p_2 = -1/T_1$ .

**Schritt 2:** Der Ansatz für einen Bruch für eine einfache reelle Nullstelle  $p_k$  ist  $\frac{const}{p - p_k}$ , also bei zwei einfachen reellen Nullstellen

$$\frac{K/T_1}{p(1/T_1 + p)} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} = \frac{A}{p - 0} + \frac{B}{p - (-1/T_1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1/T_1 + p}$$

**Schritt 3:** Wir multiplizieren beide Brüche, den ganz linken und den ganz rechten aus obiger Gleichsetzungskette, mit dem linken Nenner. Dadurch verschwinden sowohl ganz links als auch ganz rechts die Nenner und wir erhalten links und rechts jeweils ein Polynom in  $p$ .

$$\frac{K/T_1}{p(1/T_1 + p)} \cdot p(1/T_1 + p) = \frac{A}{p} \cdot p(1/T_1 + p) + \frac{B}{1/T_1 + p} \cdot p(1/T_1 + p)$$

oder gekürzt  $K/T_1 = A \cdot (1/T_1 + p) + B \cdot p \Rightarrow \frac{K}{T_1} = \frac{A}{T_1} + p \cdot (A + B)$

Durch einen Koeffizientenvergleich der p-Koeffizienten auf der linken Seite und auf der rechten Seite lassen sich die Konstanten bestimmen. Wir finden:

Für Potenz  $p^0$ :  $K/T_1 = A/T_1$  und damit  $A = K$

Für Potenz  $p^1$ :  $0 = (A + B)$  und damit  $B = -A = -K$

Unsere kleine Partialbruchzerlegung lautet damit

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} = \frac{K}{p} - \frac{K}{1/T_1 + p}$$

Bei r-fachen reellen Nullstellen  $p_r$  müssen auch r Partialbrüche entstehen. Der Ansatz ist

$$\frac{A}{(p-p_r)} + \frac{B}{(p-p_r)^2} + \dots + \frac{Z}{(p-p_r)^r}$$

Bei einem konjugiert-komplexen Nullstellenpaar  $(p_o, p_o^*)$  ist der Ansatz für den

Partialbruch  $\frac{A p + B}{(p-p_o)(p-p_o^*)}$ . Ist  $p_o, p_o^* = -\alpha \pm j\beta$ , dann vereinfacht sich der

Nenner des Ansatzes zu  $\frac{A p + B}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$ , bei rein imaginären ( $\alpha=0$ ) zu  $\frac{A p + B}{p^2 + \beta^2}$ .

Konjugiert-komplexe Nullstellenpaare können ebenfalls mehrfach auftreten. Im Falle eines doppelten Nullstellenpaares lautet der Ansatz (siehe [Roger.Burkhardt@fhnw.ch](mailto:Roger.Burkhardt@fhnw.ch)). Bei einer konjugiert komplexen Doppelnulstelle nimmt man z.B. den Ansatz aus folgendem Beispiel:

$$\frac{1}{(p^4 - 4p^3 + 38p^2 - 68p + 285)} = \frac{A_1 p + A_2}{(p^2 - 2p + 17)} + \frac{A_3 p + A_4}{(p^2 - 2p + 17)^2}$$

Ein konjugiert-komplexes Nullstellenpaar sollte man nicht auseinander reißen, d.h., man sollte nicht versuchen, zwei Partialbrüche daraus zu machen. Zumeist findet man in der Korrespondenztabelle immer ein  $F(p)$ , das genau auf ein konjugiert-komplexes Nullstellenpaar zugeschnitten ist, und das man dann relativ einfach rücktransformieren kann.

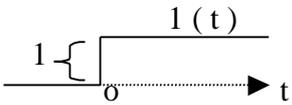
## 7.3 DGLs mit konstanten Koeffizienten und Laplace-Transformation

### 7.3.1 Entlade- bzw. Aufladekurve

Auflade- bzw. Aufheizkurven finden ebenso wie die Entlade- bzw. Abkühlkurven oftmalige Anwendung in der Elektronik, Elektrotechnik, Regelungstechnik. Die DGL ist

$$T_1 \dot{x}(t) + x(t) = K \cdot y(t)$$

Dabei ist  $T_1$  die Zeitkonstante,  $t$  die Zeit,  $x(t)$  die gesuchte Antwortkurve,  $K$  die Verstärkung bzw. Proportionalitätsfaktor und  $y(t)$  die Störfunktion, die das Aufladen oder das Aufheizen bewirkt. Ein technisches Beispiel ist ein Rührkessel, bei dem die Heizung  $y(t)$  eingeschaltet wird, worauf die Temperatur  $x(t)$  zu steigen beginnt.

<p>Die zum Zeitpunkt <math>t = 0</math> eingeschaltete Heizung eines Rührkessels wird durch die Sprungfunktion <math>1(t)</math> modelliert. Starttemperatur des Rührkessels sei <math>X_0</math> zum Zeitpunkt <math>t = 0</math>. (Sprungfunktion siehe Bild rechts)</p>	
--	---

Die Laplace-Transformation der DGL finden wir mit der Korrespondenztabelle im Abschnitt 14.10. Die Laplace-Transformierte zu  $x(t)$  ist einfach  $x(p)$ , die multiplikative Konstanten  $T_1$  und  $K$  werden einfach übernommen, und die Sprungfunktion  $1(t)$  wird zu  $1/p$ .

$$T_1 (p x(p) - X_0) + x(p) = K \cdot (1/p)$$

oder

$$x(p) \cdot (1 + T_1 p) = K/p + T_1 \cdot X_0$$

oder

$$x(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)} + \frac{X_0 T_1}{(1+T_1 p)}$$

Term der inhomogenen Lösung  
Enthält die Störfunktion und die Systemkonstante  $T_1$

Term der homogenen Lösung. Enthält den Anfangswert und Systemkonstante  $T_1$

Zur Rücktransformation finden wir im Bildbereich der Korrespondenztabelle die Funktion  $F(p) = a / (p(p+a))$ . Ihr entspricht im Zeitbereich die Aufladekurve  $f(t) = 1 - e^{-at}$ . Schauen wir uns oben den Term der inhomogenen Lösung an, dann bringt eine Erweiterung von Zähler und Nenner mit  $(1/T_1)$  diesen Term in die gewünschte Form. Wir müssen nur noch  $a = (1/T_1)$  setzen:

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} \cdot \frac{1/T_1}{1/T_1} = \frac{K \cdot (1/T_1)}{p((1/T_1)+p)} \quad \text{und mit } a = (1/T_1): \quad K \cdot \frac{a}{p(p+a)}$$

Der Term rücktransformiert führt demnach auf die Zeitfunktion

$$K (1 - e^{-at}) = K (1 - e^{-t/T_1})$$

Jetzt wenden wir uns der Rücktransformation des Terms der inhomogenen Lösung zu. In der Korrespondenztabelle korrespondiert die Entladekurve  $f(t) = e^{-at}$  aus dem Zeitbereich mit der Bildfunktion  $F(p) = 1 / (p+a)$ . Wieder erweitern wir den Bruch mit  $a = (1/T_1)$  und erhalten den neuen Bruch im Bildbereich

$$X_0 \cdot \frac{1}{((1/T_1)+p)} = X_0 \cdot \frac{1}{(p+a)} \quad \text{mit der Zeitfunktion} \quad X_0 e^{-at} = X_0 e^{-t/T_1}$$

Die Lösung setzt sich demnach aus zwei e-Funktionen zusammen und lautet

$$x(t) = K (1 - e^{-t/T_1}) + X_0 e^{-t/T_1}.$$

### 7.3.2 DGL zweiter Ordnung mit 2 reellen Wurzeln (nicht schwingendes System).

Gegeben die bereits behandelte DGL  $2 \ddot{x}(t) + 7 \dot{x}(t) + x(t) = 3t$   
mit den Startwerten  $x_0 = 5, \dot{x}_0 = 10$ .

Transformation:  $2(p^2 x(p) - 5p - 10) + 7(p x(p) - 5) + x(p) = 3/p^2$

oder  $x(p)(2p^2 + 7p + 1) = (3/p^2) + 10p + 45$

oder  $x(p) = \frac{10p^3 + 45p^2 + 3}{p^2(2p^2 + 7p + 1)} = \frac{5p^3 + 27,5p^2 + 1,5}{p^2(p^2 + 3,5p + 0,5)}$

Das Polynom  $p^2=0$  hat eine Doppelnullstelle bei  $p_0=0$ , das Polynom  $2p^2 + 7p + 1 = 0$  hat zwei reelle Nullstellen bei etwa  $p_1 = -0,15$  und  $p_2 = -3,35$ , d.h.  $p^2 + 3,5p + 0,5 = (p+0,15)(p+3,35)$

Partialbruchansatz  $x(p) = \frac{10p^3 + 45p^2 + 3}{p^2(p^2 + 3,5p + 0,5)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+0,15} + \frac{D}{p+3,35}$

Mit dem linken Nenner multipliziert und wegen  $p^2 + 3,5p + 0,5 = (p+0,15)(p+3,35)$  erhalten wir

$$5p^3 + 27,5p^2 + 1,5 = Ap(p^2 + 3,5p + 0,5) + B(p^2 + 3,5p + 0,5) + Cp^3 + 3,35Cp^2 + Dp^3 + 0,15Dp^2$$

oder

$$5p^3 + 27,5p^2 + 1,5 = Ap^3 + 3,5Ap^2 + 0,5Ap + Bp^2 + 3,5Bp + 0,5B + Cp^3 + 3,35Cp^2 + Dp^3 + 0,15Dp^2$$

Der Koeffizientenvergleich links – rechts getrennt für die Koeffizienten der p-Potenzen liefert

$p^3:$ $A + C + D = 5$	mit der Lösung	$A = -21$
$p^2:$ $3,5A + B + 3,35C + 0,15D = 27,5$		$B = 3$
$p^1:$ $0,5A + 3,5B = 0$		$C = 29,406$
$p^0:$ $0,5B = 1,5$		$D = -3,406$

Die einzelnen Brüche lassen sich jetzt mit der Korrespondenztabelle leicht rücktransformieren und liefern die Startwertlösung im Zeitbereich

$$x(t) = 29,406 e^{-0,15t} - 3,406 e^{-3,35t} - 21 + 3t.$$

### 7.3.3 DGL zweiter Ordnung mit reeller Doppelnullstelle

Gegeben die bereits behandelte DGL  $z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 5e^{0,2x}$   
mit den Startwerten  $z_0 = 5, z'_0 = -8$ .

Charakteristische Gleichung ist  $r^2 + 2r + 1 = 0$  mit der Doppelwurzel bei  $r = -1$ .

Transformierte DGL:  $z(p)p^2 - 5p + 8 + 2(z(p)p - 5) + z(p) = 5 / (p - 0,2)$   
oder

$$z(p)(p^2 + 2p + 1) = \frac{5}{p - 0,2} + 5p + 2$$

und mit  $p^2 + 2p + 1 = (p+1)(p+1) = (p+1)^2$  wird

$$z(p) = \frac{5}{(p-0,2)(p+1)^2} + \frac{5p}{(p+1)^2} + \frac{2}{(p+1)^2}$$

oder im Zähler ausmultipliziert und dann Partialbruchansatz für eine reelle Einzel- und eine reelle Doppelnulstelle

$$z(p) = \frac{5+5p(p-0,2)+2(p-0,2)}{(p-0,2)(p+1)^2} = \frac{5p^2+p+4,6}{(p-0,2)(p+1)^2} = \frac{A}{(p-0,2)} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}$$

oder

$$5p^2 + 1p + 4,6 = A(p^2+2p+1) + B((p-0,2)(p+1)) + C(p-0,2)$$

oder

$$5p^2 + 1p + 4,6 = Ap^2 + 2Ap + A + Bp^2 + 0,8Bp - 0,2B + Cp - 0,2C$$

Der Koeffizientenvergleich links-rechts getrennt nach Potenzen von p liefert die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} p^2: & A + B = 5 \\ p^1: & 2A + 0,8B + C = 1 \\ p^0: & A - 0,2B - 0,2C = 4,6 \end{array} \quad \text{mit der Lösung} \quad \begin{array}{l} A = 3,472 \\ B = 1,528 \\ C = -7,166 \end{array}$$

Rücktransformation      Term A/(p-0,2)      Term B/(p+1)      Term C/(p+1)<sup>2</sup>

$$z(t) = 3,472 e^{0,2x} + 1,528 e^{-x} - 7,166 \cdot x \cdot e^{-x}$$

Diese Lösung stimmt mit der Lösung  $z(x) = 1,528 e^{-1 \cdot x} - 7,166 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x} + 3,472 e^{0,2x}$  überein, die wir mit dem e-Ansatz erhalten haben.

### 7.3.4 DGL zweiter Ordnung mit einem konjugiert-komplexen Nullstellenpaar (schwingendes Verhalten)

$$\ddot{x}(t) + 3 \dot{x}(t) + 5 x(t) = 4 \sin(2t) \quad \text{mit der Störfunktion } 4 \sin(2t)$$

Die charakteristische Gleichung  $r^2 + 3r + 5 = 0$  führt auf das konjugiert-komplexe

$$\text{Nullstellenpaar } r_{1,2} = -1,5 \pm \sqrt{(-1,5)^2 - 5} = -1,5 \pm 1,658312i,$$

d.h. *Dämpfung*  $\delta = 1,5$  und *Kreisfrequenz*  $\omega = 1,658312$ .

Die vorgegebenen Startwerte sind  $x_0 = 1$  und  $\dot{x}_0 = -1$ .

Die Laplace-transformierte DGL lautet:

$$x(p) p^2 - 1p + 1 + 3(p x(p) - 1) + 5 x(p) = (4 \cdot 2 / 2) / (p^2 + 2^2) = 8 / (p^2 + 4)$$

oder

$$x(p)(p^2 + 3p + 5) = \frac{8}{p^2 + 4} + p + 2 = \frac{8 + p(p^2 + 4) + 2(p^2 + 4)}{p^2 + 4}$$

oder

$$x(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 4p + 16}{(p^2 + 4)(p^2 + 3p + 5)}$$

mit dem Partialbruchansatz und  $p^2 + 3p + 5 = (p + 1,5 + 1,658i)(p + 1,5 - 1,658i)$

$$x(p) = \frac{A}{(p^2 + 4)} + \frac{Bp}{(p^2 + 4)} + \frac{C}{(p + 1,5 + 1,658i)(p + 1,5 - 1,658i)} + \frac{Dp}{(p + 1,5 + 1,658i)(p + 1,5 - 1,658i)}$$

Wegen  $j^2 = -1$  ist

$$(p + \delta + j\omega)(p + \delta - j\omega) = p^2 + p\delta - pj\omega + p\delta - \delta j\omega + pj\omega + \delta j\omega + \omega^2 = (p + \delta)^2 + \omega^2$$

und damit

$$p^3 + 2p^2 + 4p + 16 = A((p+1,5)^2 + 1,658^2) + Bp((p+1,5)^2 + 1,658^2) + C(p^2 + 4) + Dp(p^2 + 4).$$

Ausmultipliziert

$$p^3 + 2p^2 + 4p + 16 = Ap^2 + 3Ap + 5A + Bp^3 + 3Bp^2 + 5Bp + Cp^2 + 4C + Dp^3 + 4Dp.$$

Der Koeffizientenvergleich getrennt für die Potenzen von p liefert die 4 Gleichungen

$p^3:$	$B + D = 1$		$A = 0,216216$
$p^2:$	$A + 3B + C = 2$	mit den Lösungen	$B = -0,648648$
$p^1:$	$3A + 5B + 4D = 4$		$C = 3,729729$
$p^0:$	$5A + 4C = 16$		$D = 1,648648$

Mit *Dämpfung*  $\delta = 1,5$  und *Kreisfrequenz*  $\omega = 1,658$  ergibt sich die Rücktransformation der einzelnen Terme der Partialbruchzerlegung so:

$$\frac{A}{p^2 + 2^2} \Rightarrow \frac{A}{2} \sin(2t) = 0,108108 \cdot \sin(2t) \qquad \frac{Bp}{p^2 + 2^2} \Rightarrow -0,6486648 \cdot \cos(2t)$$

Der D-Term ergibt den gedämpften Kosinus minus einem Term, der dem C-Term zugeschlagen werden muss, da bei ihm im Zähler kein p auftritt:

$$\frac{Dp}{(p^2 + 3p + 5)} = \frac{D(p + \delta)}{(p^2 + 3p + 5)} - \frac{D\delta}{(p^2 + 3p + 5)} \Rightarrow 1,648648 \cdot \cos(1,658t) \cdot e^{-1,5t} - \frac{D\delta}{(p^2 + 3p + 5)}$$

$$\frac{C - D\delta}{(p^2 + 3p + 5)} = \frac{3,729729 - 1,648548 \cdot 1,5}{(p^2 + 3p + 5)} = \frac{1,256757}{(p^2 + 3p + 5)} \Rightarrow \frac{1,256757}{1,658312} \sin(1,658312t) \cdot e^{-1,5t}$$

Zusammengesetzt erhalten wir die schon bekannte Lösung

$$x(t) = e^{-1,5t} ( 1,648 \cos(1,658t) + 0,757 \sin(1,658t) ) + 0,108 \sin(2t) - 0,648 \cos(2t)$$

## 8. Übungsbeispiele

**Vektorrechnung:** Darstellung von Vektoren, Komponenten, Einheitsvektor, Addition, Subtraktion, Projektion, Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Geraden, Ebenen

1. Gegeben sind die 3 Vektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

- a) Normieren Sie Vektor  $\vec{u}$  auf Länge 1
- b) Normieren Sie Vektor  $\vec{v}$  auf Länge 5
- c) Bilden Sie das Skalarprodukt  $k = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- d) Bilden Sie das Kreuzprodukt  $\vec{c} = \vec{v} \times \vec{w}$

Lösungen:

$$a) \quad |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3,742 \quad \vec{u}_n = \begin{pmatrix} 1/3,742 \\ 2/3,742 \\ 3/3,742 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,267 \\ 0,535 \\ 0,802 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad |\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 3^2} = 9,11 \quad \text{Faktor } 5/9,11 = 0,5488$$

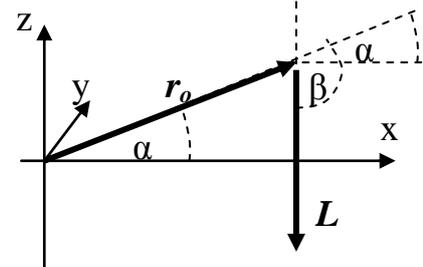
$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} 7 \cdot 0,5488 \\ -5 \cdot 0,5488 \\ 3 \cdot 0,5488 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,842 \\ -2,744 \\ 1,646 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \text{Skalarprodukt} \quad k = 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) + 3 \cdot 3 = 7 - 10 + 9 = 6$$

$$d) \quad \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 4 - 7 \cdot 7 \\ 7 \cdot (-2) - (-5) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -37 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Eine Kurbelstange mit Länge  $r = 0,85$  [m] habe eine Neigung von  $\alpha = 27^\circ$  zur waagrechten Linie. Am Ende hängt eine Masse von  $M = 40$  [Kg]. Berechnen Sie das Drehmoment  $D$  in [Nm]. Benutzen Sie die Erdbeschleunigung  $g = 9,81$  [m/s<sup>2</sup>]

Lösung: Last  $L = m \cdot g = 40 \cdot 9,81$  [N]. Kraftarm  $r_o$  hat Winkel  $\alpha = 27^\circ$  mit der x-Achse. Um Kraftarm  $r_o$  auf kürzestem Weg in Richtung Kraftvektor  $L$  zu drehen, sind  $\beta = \alpha + 90^\circ = 117^\circ$  nötig. Drehmoment  $D = r_o L \sin(\beta) = 0,85 \cdot 40 \cdot 9,81 \cdot \sin(117^\circ) = 297,19$  [Nm]. Laut Korkenzieherregel zeigt Vektor  $D$  in positive y-Richtung, d.h. senkrecht nach hinten.



3. Gegeben sind die 2 Punkte  $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $P_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$  einer Geraden. Berechnen Sie die Parameterform, die Koordinatenform und die Hessesche Normalform der Geraden.

$$y = a + b x \quad \text{Anstieg der Geraden ist} \quad b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 4}{7 - 3} = \frac{-9}{4} = -2,25$$

$$\text{Konstante } a \text{ ist} \quad a = y_1 - b x_1 = 4 - (-2,25) \cdot 3 = 10,75$$

$$\text{Damit ist die Parameterform} \quad y = 10,75 - 2,25 x$$

$$\text{Daraus folgt die Koordinatenform} \quad 2,25 x + 1 y = 10,75$$

$$\text{Daraus folgt der unnormierte Normalenvektor} \quad \vec{n}_{un} = \begin{pmatrix} 2,25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit Norm } |\vec{n}_{un}| = \sqrt{2,25^2 + 1^2} = 2,462 \quad \text{und der normierte Vektor} \quad \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0,914 \\ 0,406 \end{pmatrix}.$$

Abstand  $d_0$  der Geraden vom Ursprung berechnen wir aus dem Skalarprodukt des normierten Vektors mit einem der Ortsvektoren, z.B.  $P_1$ :

$$d_0 = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,914 \\ 0,406 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0,914 + 4 \cdot 0,406 = 4,366.$$

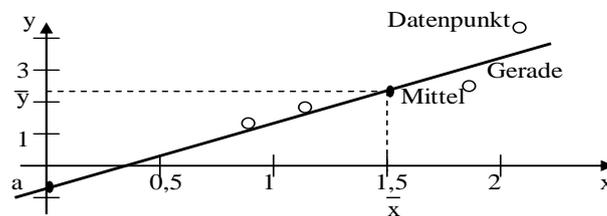
Damit haben wir alle Bestandteile der Hesse'schen Normalform dieser Geraden:

$$\vec{p} \cdot \vec{n}_0 = d_0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,914 \\ 0,406 \end{pmatrix} = 4,366.$$

4. Berechnen Sie die Ausgleichsgerade  $y = a + b x$  zu den Datenpunkten  $(x_i, y_i)$ : (0.9 , 1.4), (1.2 , 1.7), (1.8 , 2.5), (2.1, 4.2). Machen Sie eine Skizze.

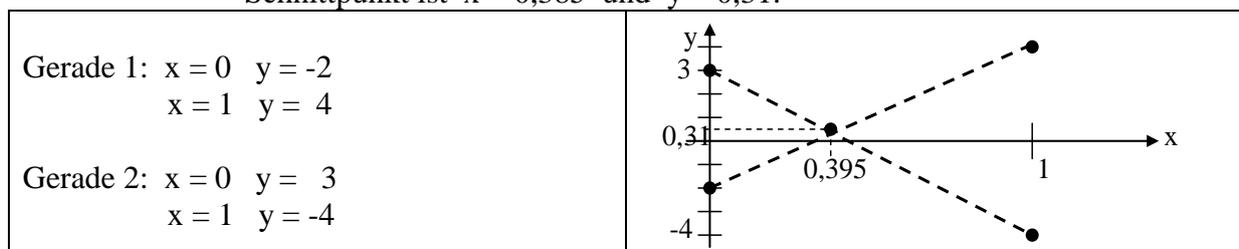
Lösung:  $x_i = (0.9, 1.2, 1.8, 2.1)$   $y_i = (1.4, 1.7, 2.5, 4.2)$   
 $n=4$   $\bar{x} = 1,5$   $\bar{y} = 2,45$   
 $\sum x_i y_i = 0.9 \cdot 1.4 + \dots + 2.1 \cdot 4.2 = 16,62$   
 $\sum x_i^2 = 0.9^2 + \dots + 2.1^2 = 9,9$   
 $b = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{16,62 - 4 \cdot 1,5 \cdot 2,45}{9,9 - 4 \cdot 1,5^2} = \frac{1,92}{0,9} = 2,1333$  Anstieg  
 $a = \bar{y} - b \bar{x} = 2,45 - 2,1333 \cdot 1,5 = -0,7495$  Konstante

Skizze



5. Wo schneiden sich die Geraden  $y = -2 + 6 x$  und  $y = 3 - 7 x$ ? Berechnen Sie die Schnittpunktkoordinaten  $x$  und  $y$  und machen Sie eine Skizze.

Lösung: Gleichsetzen  $-2 + 6 x = 3 - 7 x \rightarrow 13 x = 5 \rightarrow x = 5/13 = 0,385$   
 Einsetzen in eine der Geradengleichungen:  $y = -2 + 6 \cdot 0,385 = 0,31$   
 Schnittpunkt ist  $x = 0,385$  und  $y = 0,31$ .



6. Eine U-Bahntrasse gehe durch die Punkte  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $P_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Eie Kabeltrasse gehe durch die Punkte  $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $P_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie den geringsten Abstand  $d$  zwischen den beiden Trassen (Abstand zweier windschiefer Geraden). Lösung:

Vektorform Gerade 1:  $\vec{P} = \vec{P}_1 + t \vec{u}$   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7-1 \\ 3-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Vektorform Gerade 2: } \vec{P} = \vec{P}_1 + s\vec{v} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3-0 \\ 8-3 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die unnormierte Normale auf der Ebene uv ergibt sich aus dem Kreuzprodukt.

$$\vec{n}_{un} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 - 6 \cdot (-5) \\ 6 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix}$$

mit Norm  $\sqrt{(-15)^2 + 36^2 + 27^2} = 47,434$ .

Der Abstand der Geraden ist  $d = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ . Als Ortsvektoren  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  müssen wir

je einen beliebigen Punkt von jeder Geraden auswählen. Wir nehmen  $P_3$  und  $P_1$ .

$$d = |(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{un}| / |\vec{n}_{un}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} \right| / 47,434 = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} \right| / 47,434$$

oder  $d = (-1 \cdot (-15) + 1 \cdot 36 + 2 \cdot 27) / 47,434 = 2,213$ . Abstand  $d = 2,213$ .

**a)** Normieren Sie den Vektor  $\vec{z} = (1,4, -3,6, 2,9)$  auf die Länge (bzw. Norm)  $L=5,55$

**b)** Berechnen das Skalarprodukt zweier Vektoren  $S = (1,4, -3,6, 2,9) \cdot (4, 7, -2)$

$$\text{Lös. a) } \vec{z} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ -3,6 \\ 2,9 \end{bmatrix} \quad |\vec{z}| = \sqrt{1,4^2 + (-3,6)^2 + 2,9^2} = 4,83$$

$$\vec{z}_{5,55} = \begin{bmatrix} (1,4/4,83) \cdot 5,55 \\ (-3,6/4,83) \cdot 5,55 \\ (2,9/4,83) \cdot 5,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,609 \\ -4,137 \\ 3,332 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) Skalarprodukt } S = \begin{bmatrix} 1,4 \\ -3,6 \\ 2,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = 1,4 \cdot 4 + (-3,6) \cdot 7 + 2,9 \cdot (-2) = -25,4$$

**Lineare Algebra:** Darstellung, Rechnen mit Matrizen und Vektoren, Drehmatrix, lineare Gleichungssysteme (Eliminationsverfahren GAUSS oder GAUSS-JORDAN, inverse Matrix, über- und unterbestimmte Systeme), Determinanten (Rang einer Matrix, SARRUSsche Regel, CRAMERSche Regel), Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

**7.** Lösen Sie nach Gauß-Elimination oder **Gauß-Jordan** das folgende lineare 2x2-Gleichungssystem und machen Sie die Probe. Geben ein Zwischenresultate an!

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \text{Lösung: } \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 6,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Probe machen !!!

8. Gegeben ist das 2x2-Gleichungssystem  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ,  $\begin{pmatrix} 9,4 & 3,6 \\ 3,6 & 4,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,4 \\ -8,6 \end{pmatrix}$ .
- Lösen Sie das kleine Gleichungssystem nach Cramer (Division von Determinanten) mit Probe.
  - Berechnen Sie die beiden Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  der Matrix A (Polynomnullstellen).
  - Berechnen Sie den unnormierten Eigenvektor  $\vec{x}_{1,u}$  zum Eigenwert  $\lambda_1$ .
  -

Lös. a)  $D=31,22$   $x_1 = (12,4 \cdot 4,7 + 8,6 \cdot 3,6) / D = 2,8584$   
 $x_2 = (-9,4 \cdot 8,6 - 3,6 \cdot 12,4) / D = -4,0192$  Probe Gl.1: 12,3998

Lös. b)  $(9,4 - \lambda)(4,7 - \lambda) = \lambda^2 - 14,1\lambda + 31,22 \rightarrow \lambda_{1,2} = 7,05 \pm 4,299$   
 $\lambda_1 = 11,349$   $\lambda_2 = 2,751$

Lös. c)  $\vec{x}_{1,u} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$  und  $x_{11} = 1$  gesetzt  $\rightarrow 9,4 + 3,6 \cdot x_{21} = 11,349 \rightarrow x_{21} = 0,541$

9. Verschiedenes:

- Drehen Sie den Vektor  $\vec{a} = (2, -3, 4)$  um  $21^\circ$  um die x-Achse. Nennen Sie ihn dann  $\vec{a}_d$ .
- Machen Sie aus obigem originalen Vektor  $\vec{a}$  den Einheitsvektor  $\vec{e}_a$ .

c) Berechne aus Matrix <b>D</b> die beiden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ .	$D = \begin{bmatrix} 12,3 & 1,7 \\ 1,7 & 3,4 \end{bmatrix}$
--	---

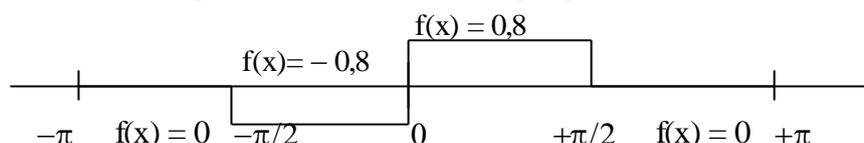
Lösung a)  $Dx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,93 & -0,36 \\ 0 & 0,36 & 0,93 \end{bmatrix}$   $\vec{a}_d = Dx \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4,234 \\ 2,659 \end{bmatrix}$

b) Norm  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = 5,385$   $\vec{e}_a = \begin{bmatrix} 2/5,385 \\ -3/5,385 \\ 4/5,385 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,371 \\ -0,557 \\ 0,743 \end{bmatrix}$

c)  $\lambda^2 - (12,3 + 3,4)\lambda + 12,3 \cdot 3,4 - 1,7^2 = \lambda^2 - 15,7\lambda + 38,93$   
 $\lambda_{1,2} = 7,85 \pm \sqrt{7,85^2 - 38,93} = 7,85 \pm 4,76$   $\lambda_1 = 12,61$   $\lambda_2 = 3,09$

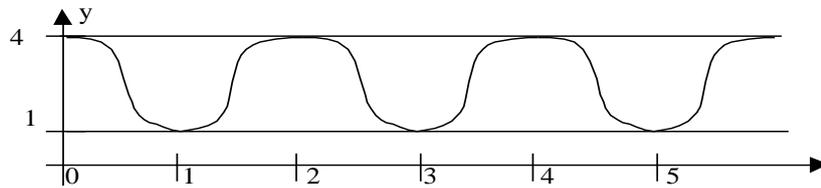
**Fourier-Reihen:** (Fourier-Reihe, reell, komplex, beliebige Periode, punktweise Funktion), Wellen (zeitliche und räumliche Ausbreitung von Wellen, Amplitude, Frequenz, Phase)

12. Berechnen Sie die allgemeine Formel für die Fourierkoeffizienten der mit der Periode  $2\pi$  periodischen ungeraden Rechteckschwingung  $f(x)$ .



( Lösung: Nur b-Koeffizienten, da ungerade Funktion. Z.B.  $b_3 = 0,169$  )

14. a) Bestimme zur Funktion  $y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi)$  aus der folgenden Graphik die 4 Zahlen  $y_0, A, \omega, \phi$



- b) Berechnen Sie zur Kontrolle die Werte  $y(1,5)$  und  $y(3,0)$  und vergleichen Sie die Werte mit der Graphik

(Lösung zu a:  $y_0 = 2,5$   $A = 1,5$   $\omega = \pi$   $\phi = 0,5\pi$  )

- c) Bestimme  $y_0, A, \omega, \phi$  einer Sinuswelle  $y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi)$  mit der mittleren Höhe 7.3, Minima 4.0, Zeitpunkt des zweiten Minimums  $t_{2,\min} = 4,8$  [s], Zeitpunkt des dritten Minimums  $t_{3,\min} = 8,75$  [s],

(Lösung zu c:  $y_0 = 7,3$   $A = 3,3$   $\omega = 1,5907$   $\phi = -2,9229$  )

- d) Berechnen Sie zur Kontrolle  $y(4,8)$  und kontrollieren, ob  $y = 4,0$  herauskommt.

**Differenzialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen:** graphische Darstellung, skalare und Vektorfelder, partielle Ableitung, Differenzial, Gradient, Kettenregeln, Fehlerfortpflanzung

- 15 a) Bestimmen Sie die Formeln und Zahlenwerte der beiden partiellen Ableitungen der Funktion  $E(\lambda, x)$  im Punkt  $P=(\lambda, x)=(3,0, 4,0)$  für  $E_0=12$ ,  $\lambda_0=2,4$ ,  $\gamma=0,2$  und  $k=0,5$  mit

$$E(\lambda, x) = E_0 + (\lambda_0 - \lambda)^2 (e^{\gamma \cdot x} - kx)$$

Lös.:  $E_\lambda = -2(2,4 - \lambda)(e^{0,2x} - 0,5x) = 0,2706$

$$E_x = (2,4 - \lambda)^2 (0,2e^{0,2x} - 0,5) = -0,0198$$

- b) Berechnen Sie den Anstieg  $E_\nabla$  in Gradientenrichtung und den Winkel  $\alpha$  in Grad, den der Gradient mit der  $\lambda$ -Achse bildet (die  $\lambda$ -Achse zeigt nach rechts).

Lös.:  $E_\nabla = \sqrt{0,2706^2 + (-0,0198)^2} = 0,2713$   $\alpha = \arctan(-0,0198/0,2706) = -4,18^\circ$

- c) Berechnen Sie die Richtungsableitung  $E_\beta$  zur Richtung  $\beta=45^\circ$ .

Lös.: Vektor  $\vec{e}_\beta = (0,7071, 0,7071)$   $E_\beta = \vec{e}_\beta \cdot \nabla E = 0,1773$

- d) Für Freaks: Wo liegt das Minimum der Funktion  $E(\lambda, x)$ , d.h. der Punkt  $P_M=(\lambda_{\min}, x_{\min})$ ?

Lös.:  $\lambda_{\min} = 2,4$   $x_{\min} = 0,2e^{0,2x_{\min}} - 0,5 = 0$   $e^{0,2x_{\min}} = 2,5$   $x_{\min} = \ln(2,5)/0,2 = 4,5815$

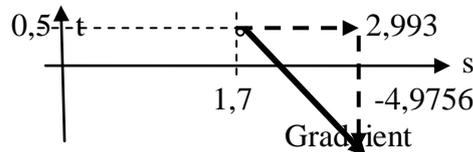
16. Gegeben ist die Funktion zweier Veränderlicher  $K(s, t) = \frac{(4s - 7t)^2}{7 + 2s - 5t}$ .

- a) Geben Sie die Formeln für die beiden partiellen Ableitungen  $K_s$  und  $K_t$  an.  
 b) Berechnen Sie den Gradienten  $\nabla K$  im Punkt  $(s, t) = (1,7, 0,5)$   
 c) Machen Sie eine Skizze des Gradientenpfeils im Koordinatensystem s-t am Berechnungspunkt

Lös. a) 
$$K_s = \frac{2(4 \cdot s - 7t) \cdot 4 \cdot (7 + 2s - 5t) - (4s - 7t)^2 \cdot 2}{(7 + 2s - 5t)^2}$$

$$K_t = \frac{2(4 \cdot s - 7t)(-7)(7 + 2s - 5t) - (4s - 7t)^2(-5)}{(7 + 2s - 5t)^2}$$

Lös. b)  $s=1,7 \quad t=0,5 \quad K_s=2,993 \quad K_t=-4,9756 \quad \vec{\nabla}K = \begin{pmatrix} 2,993 \\ -4,9756 \end{pmatrix}$



Lös. c)

**Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen:** konstante Grenzen, Produktzerlegung, Koordinatensysteme, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Trägheitsmomente, variable Grenzen.

<b>17 a)</b> Berechne das Flächenträgheitsmoment $\Theta$ eines Balkens mit Rechteckprofil (Höhe $H=0,35$ m, Breite $B=0,15$ m)	$\Theta = 2 \cdot 0,15 \cdot \int_0^{0,175} y^2 dy$
---	---

**b)** Berechne Balkenbiegung  $z$  mit  $\Theta=0,001 \text{ m}^4$  und  $a=8$  m und  $\varepsilon=3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  und der mittig hängenden Last von  $M=500$  Kg. Angabe von  $z$  in mm.

**Der Balken ist beidseitig aufgelegt!**

b) Flächenträgheitsmoment  $\Theta = 2 \cdot 0,15 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,175^3 = 0,0005359$

c) Balkenbiegung  $z = -\frac{250 \cdot 9,81 \cdot 4^3}{3 \cdot 10^{10} \cdot 0,001 \cdot 3} = -1,744 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cong -1,744 \text{ mm}$

**17b.** Wandeln Sie die Koordinaten  $(x, y, z) = (-4, 7, 2)$  in Zylinderkoordinaten  $r, \phi, z$  um. Den Winkel  $\phi$  geben Sie in Gradmaß und in Bogenmaß an.

Lösung: 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad r = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = 8,062 \quad \phi^* = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -60,255^\circ$$

$\phi = \phi^* + 180^\circ = 119,75^\circ \cong 2,09 \text{ Rad} \quad z=2 \text{ bleibt}$

**18.** Bestimmen Sie mit Angabe von Zwischenschritten die Werte der beiden Integrale mit  $K=17,3$ ,  $\rho_0=5$  und  $\tau=1,5$

$$M = \int_{y=0}^4 \int_{w=0}^6 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 (y - \tau) w^2 d\varphi dw dy \quad N = \int_{u=0,5}^{1,5} \int_{y=\cos(3u)}^{\cos(4u)} \int_{\psi=0}^{\pi} K d\psi dy du$$

Lös.:  $M = 72 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[ \frac{y^2}{2} - 1,5y \right]_0^4 = 4523,8934$

$$N = 17,3 \cdot \pi \cdot \left[ \frac{1}{4} \sin(4u) - \frac{1}{3} \sin(3u) \right]_{0,5}^{1,5} = 19,629$$

19. Berechnung 3-fach-Integral  $U = \int_{z=0}^H \int_{y=0}^{\sin(x)} \int_{x=0}^{\pi/2} \beta e^{-0,3z} dx dy dz$

mit  $H = 1,7$  und  $\beta = 14,2$ .

Integrieren Sie zuerst über y, dann über x, zuletzt über z. Schreiben Sie mindestens drei Zwischenergebnisse (Formeln) der Integrationen auf. Das letzte Integral lösen Sie direkt bzw.

numerisch mit dem TR (Numerische Integration mit dem TR gibt aber 1 Punkt Verlust.)

Lös.:  $U = 14,2 \int_z \int_x e^{-0,3z} \sin(x) dx dz = 14,2 \int_z [e^{-0,3z} (-\cos(x))]_0^{\pi/2} dz$

$$U = 14,2 \int_z e^{-0,3z} dz = 14,2 \left[ -\frac{1}{0,3} e^{-0,3z} \right]_0^{1,7} = 18,91$$

20. Berechnen Sie die Lösungsformeln und den Zahlenwert des Dreifachintegrals

$$M = \int_{z=0}^2 \int_{y=3}^{3-z} \int_{x=0}^y K_0 \cdot x dx dy dz \quad \text{mit } K_0 = 4,28$$

Integrieren Sie zuerst über x, dann über y, dann über z.

(Binom  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ )

Lös.:  $M = 4,28 \int_z \int_y [0,5x^2]_0^y dy dz$

$$M = \frac{4,28}{2} \int_z \int_{y=3}^{3-z} y^2 dy dz = 2,14 \int_z \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_3^{3-z} dz = \frac{2,14}{3} \int_z ((3-z)^3 - 3^3) dz$$

$$M = \frac{2,14}{3} \int_{z=0}^3 (3^3 - 3 \cdot 3^2 z + 3 \cdot 3 z^2 - z^3 - 3^3) dz = \frac{2,14}{3} \int_{z=0}^3 (-27z + 9z^2 - z^3) dz$$

$$M = \frac{2,14}{3} \left[ -\frac{27}{2} z^2 + \frac{9}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right]_0^3 = \frac{2,14}{3} \left( -\frac{27}{2} 2^2 + \frac{9}{3} 2^3 - \frac{1}{4} 2^4 \right) = -24,253$$

21. Berechnung 3-fach-Integral  $K = \int_{z=0}^5 \int_{y=0}^{2x-3z} \int_{x=0}^{2z} \Phi x^2 y dx dy dz$  mit  $\Phi = 12,4$ .

Integrieren Sie zuerst über y, dann das Binom auflösen und mit  $x^2$  multiplizieren, dann Integration über x, zuletzt über z. Beachten Sie die variablen Grenzen. Schreiben Sie mindestens ein Zwischenergebnisse pro Integration auf. Den Zahlenwert des letzten Integrals dürfen Sie ohne Punktabzug numerische mit dem TR integrieren.

Lösung: Integration y:  $K = 12,4 \int_z \int_x \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^{2x-3z} dx dz = 6,2 \iint (4x^4 - 12x^3 z + 9x^2 z^2) dx dz$

Integration x:  $K = 6,2 \int_z \left[ \frac{4x^5}{5} - \frac{12x^4}{4} z + \frac{9x^3}{3} z^2 \right]_0^{2z} dz = 6,2 \int_z \left( \frac{4}{5} 2^5 z^5 - \frac{12}{4} 2^4 z^5 + \frac{9}{3} 2^3 z^5 \right) dz$

Integration z:  $K = 6,2 \int_0^5 1,6z^5 dz = 6,2 \cdot 1,6 \cdot \left[ \frac{z^6}{6} \right]_0^5 = 6,2 \cdot 1,6 \cdot 5^6 / 6 = 25833$

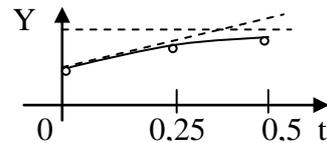
**Gewöhnlichen Differentialgleichungen:** Klassifikation, Anfangswerte bzw. Randbedingungen, Trennung der Veränderlichen, Variation der Konstanten, DGL mit konstanten Koeffizienten, e-Ansatz, homogene, inhomogene DGL, charakteristische Gleichung, inhomogener Lösungen, Systeme linearer DGL

**22 a)** Lösen Sie nach der Methode "Trennung der Veränderlichen" mit  $\alpha=3$  und  $\Theta=4$  und Startpunkt  $y_0=0.5$  bei  $t_0=0$  die DGL

$$\dot{y}(t) + \alpha \cdot y(t) = \Theta$$

$$\text{Lös.: } y = \frac{1}{3}(4 - C \cdot e^{-3t}) \quad \text{mit } C=2,5$$

**b)** Machen Sie eine Skizze der Lösung mit Startpunkt und Werten  $y(t)$  für  $t=0.25$  und  $t=0.5$



Lös.:  $t=0,25$  gibt  $y=0,9397$   $t=0,5$  gibt  $y=1,1474$   
(Zeichnung ohne die gestrichelten Linien)

**c)** Welcher Wert stellt sich für  $t \rightarrow \infty$  ein?      Lös.:  $y \rightarrow 4/3$

**d)** Für Freaks: Bei welchem  $t$  genau schneidet die Tangente an den Startanstieg die Gerade  $y=4/3$ ? Zeichnen Sie die Tangente und den Schnittpunkt in die Skizze zu Punkt b) mit ein.

$$\text{Lös.: } \dot{y}_0 = 4 - 3y = 4 - 3 \cdot 0,5 = 2,5 \quad \Delta y / \Delta t = \frac{4/3 - 0,5}{\Delta t} = 2,5 \rightarrow \Delta t = 0,3333$$

(In der Graphik die gestrichelten Linien)

**23 a)** Lösen Sie mit e-Ansatz für  $\omega=0.65$ ,  $K_p=15$ ,  $\mu=8$ ,  $\delta=3.2$ ,  $\chi=3$ ,  $y_0=1$ ,  $y_0'=0$  die DGL

$$\mu \cdot \ddot{y}(t) + \delta \cdot \dot{y}(t) + \chi \cdot y(t) = K_p \sin(\omega \cdot t)$$

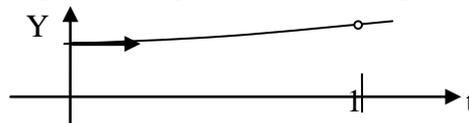
$$\text{Lös.: } r_{1,2} = -0,2 \pm 0,5788 \quad y_h = e^{-0,2t} (A \cos(0,5788 t) + B \sin(0,5788 t))$$

$$y_{sp} = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t) \quad K_1 = -1,2749 \quad K_2 = -6,9786$$

$$y = e^{-0,2t} (A \cos(0,5788 t) + B \sin(0,5788 t)) - 1,2749 \sin(\omega t) - 6,9786 \cos(\omega t)$$

$$A=7,9786 \quad B=4,1887$$

**b)** Zeichnen Sie eine Skizze der Lösung mit Startpunkt, Startanstieg und Wert  $y(t)$  für  $t=1$



Lös.:  $y(1)=1,0168$

**c)** Wie lautet die Formel der Lösung, die für  $t \rightarrow \infty$  übrig bleibt?

$$\text{Lös.: } y(t \rightarrow \infty) = -1,2749 \sin(0,65t) - 6,9786 \cos(0,65t)$$

**d)** Welche Kreisfrequenz  $\omega$  müsste die Störfunktion im Resonanzfall haben?

$$\text{Lös.: } \omega = 0,5788$$

**24.** Gegeben ist die DGL  $\Phi \dot{z}(x) + (2 + 3x)z = 0$  mit  $\Phi = 5$

- a) Bestimmen Sie die Lösungsfunktion  $z(x)$  nach der Methode „Trennung der Veränderlichen.  
 b) Bestimmen Sie die Integrationskonstante  $C$  aus dem Startwert  $z_0=2$  bei  $x=1$ .  
 c) Berechnen Sie den Wert der Lösung  $z(x)$  für  $x=2,5$ .

Lös. a)  $5\dot{z} + (2+3x)z = 0 \rightarrow \int \frac{1}{z} dz = \int \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}x\right) dx \rightarrow \ln(z) = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}x^2 + \ln(C)$

$z = Ce^{-(2/5)x - (3/10)x^2}$

Lös. b)  $z_0=2$  bei  $x=1$        $2 = Ce^{-0,4-0,3}$        $2=C \cdot 0,49658$        $C=4,02751$

Lös. c)  $z(2,5)=0,227$

25. DGL:  $a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 3 \cdot e^{0,3t}$  mit  $a_2=1,2$ ,  $a_1=6$ ,  $a_0=2,7$ .

Beispiel mit 2 reellen Wurzeln des charakteristischen Polynoms.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mittels e-Ansatz. Notieren Sie wichtige Zwischenresultate. Das ch. Polynom hat 2 reelle Wurzeln.  
 b) Bestimmen Sie die Konstanten  $C_1, C_2$  mit den Startwerten  $y_0 = 5,2$  und  $\dot{y}_0 = -0,5$  für  $t=0$ .  
 c) Berechnen Sie den Wert der Lösung  $y(t)$  für den einen Punkt  $t=3,5$ .  
 d) Machen Sie eine Skizze mit Startpunkt, Startanstieg, Punkt  $y(3,5)$ , Lösung (durchgezogen) und inhomogener Lösung (gestrichelt).

Lös. a) charakt. Gleichung  $1,2r^2 + 6r + 2,7$        $r_{1,2} = -2,5 \pm 2$        $r_1 = -0,5$        $r_2 = -4,5$

$Y_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-0,5t} + C_2 e^{-4,5t}$       Inhomogener Ansatz:  $y = K e^{0,3t}$

mit  $\dot{y} = 0,3Ke^{0,3t}$  und  $\ddot{y} = 0,3^2 Ke^{0,3t}$

Koeff.-vergleich:  $1,2 \cdot 0,3^2 k + 6 \cdot 0,3k + 2,7k = 3$       gibt  $K=0,651$

$y(t) = C_1 e^{-0,5t} + C_2 e^{-4,5t} + 0,651 e^{0,3t}$

Lös. b)  $y_0 = 5,2$  und  $t=0$  in  $y(t)$  eingesetzt gibt  $5,2 = C_1 + C_2 + 0,651$  oder  $C_1 + C_2 = 4,549$

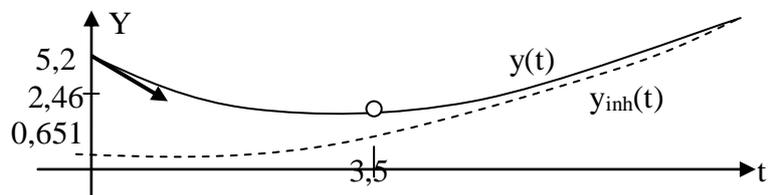
$\dot{y}(t) = -0,5 C_1 e^{-0,5t} - 4,5 C_2 e^{-4,5t} + 0,3 \cdot 0,651 e^{0,3t}$  und mit  $\dot{y}_0 = -0,5$  und  $t=0$

Erhalten wir  $-0,5 = -0,5 C_1 - 4,5 C_2 + 0,1953$  oder  $0,5 C_1 + 4,5 C_2 = 0,6953$

Löse Gleichungssystem  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 4,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,549 \\ 0,6953 \end{pmatrix}$        $C_1=4,9438$        $C_2=-0,3948$

Allg. Lösung:  $y(t) = 4,9438 e^{-0,5t} - 0,3948 e^{-4,5t} + 0,651 e^{0,3t}$

Lös. c)  $y(3,5)=2,4622$



Lös. d) Skizze

26. Löse die DGL 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$2\ddot{z}(t) + 6\dot{z}(t) + 4,5z(t) = 2 + 3 \cdot t$

mit den Startwerten  $z_0 = 3$ ,  $\dot{z}_0 = -2$ ,  $t_0 = 0$ . Das ch. Polynom hat eine Doppelwurzel!

- a) Bestimme die homogene Lösung  $z_{\text{hom}}(t)$  mit noch freien Konstanten  $C_1$  und  $C_2$   
 b) Bestimme die inhomogene Lösung  $z(t)$ , ihre Konstanten  $K_0$  und  $K_1$ , und die allg. inhom. Lösung  
 c) Bestimme aus den Startwerten die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  und notiere  $z(t)$  mit allen

Konstanten

d) Berechne  $z(t)$  für  $t=2$

e) Mache eine Skizze mit Achsenkreuz, den Startwerten  $z_0 = 3$ ,  $\dot{z}_0 = -2$  und Punkt  $z(t=2)$

Lös. a) ch. Polynom  $r^2 - 3r + 2,25 = 0$  Doppelwurzel  $r = -1,5$

$$\text{Ansatz } z_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-1,5t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-1,5t}$$

b)  $z_{\text{spez}}(t) = K_0 + K_1 t \quad \dot{z} = K_1 \quad \ddot{z} = 0$

eingesetzt in DGL:  $2 \cdot 0 + 6K_1 + 4,5(K_0 + K_1 t) = 2 + 3t$

Koeffizientenvergleich liefert  $4,5K_0 + 6K_1 = 2 \quad 4,5K_1 = 3$

Aus 2. Gleichung folgt  $K_1 = 2/3$  eingesetzt in 1. Gl.  $K_0 = -0,44444$

allgemeine Lösung DGL:  $z(t) = C_1 e^{-1,5t} + C_2 t e^{-1,5t} - 0,44444 + 0,66666t$

c) Startwert 3 in allg. Lös.:  $3 = C_1 - 0,44444 \quad C_1 = -3,44444$

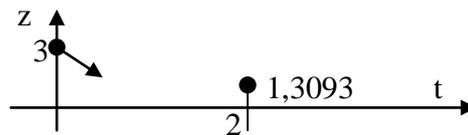
Ableitung allg. Lösung (Produktregel!)

$$\dot{z}(t) = -1,5C_1 e^{-1,5t} + C_2 e^{-1,5t} - C_2 t e^{-1,5t} (-1,5) + 0,66666$$

Startwert -2 in Ableitung eingesetzt:  $-2 = -1,5 \cdot (-3,44444) + C_2 + 0,66666 \quad C_2 = 2,5$

Startwertlösung:  $z(t) = 3,44444 e^{-1,5t} + 2,5 t e^{-1,5t} - 0,44444 + 0,66666t$

d)  $z(t=2) = 1,3093$



4e) Skizze

27. Löse die DGL 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$1,5 z''(x) + 4,8 z'(x) + 6,75 z(x) = 3 \cos(2,2x) \quad (\text{konj. komplexes Wurzelpaar!})$$

mit den Startwerten  $z_0 = 3,1$ ,  $z'_0 = -0,45$ ,  $x_0 = 0$ .

a) Suche allgemeine homogene Lösung und allgemeine Lösung

ch. Polynom:  $1,5r^2 + 4,8r + 6,75 = 0 \quad r_{1,2} = -1,6 \pm 1,3928i$

$$z_h(x) = e^{-1,6x} ( A \cos(1,3928x) + B \sin(1,3928x) )$$

inh. Ansatz laut Tabelle:  $z(x) = K_1 \sin(2,2x) + K_2 \cos(2,2x)$

mit den Ableitungen  $z'(x) = K_1 \cos(2,2x) \cdot 2,2 - K_2 \sin(2,2x) \cdot 2,2$

$$z''(x) = -K_1 \sin(2,2x) \cdot 2,2^2 - K_2 \cos(2,2x) \cdot 2,2^2$$

eingesetzt in die DGL mit  $2,2^2 = 4,84$  ergibt:

$$1,5(-K_1 \sin(2,2x) \cdot 4,84 - K_2 \cos(2,2x) \cdot 4,84) + 4,8(K_1 \cos(2,2x) \cdot 2,2 - K_2 \sin(2,2x) \cdot 2,2) + 6,75(K_1 \sin(2,2x) + K_2 \cos(2,2x)) = 3 \cos(2,2x)$$

Koeffizientenvergleich zusammengefasst für sin:  $0,51 K_1 + 10,56 K_2 = 0$

Koeffizientenvergleich zusammengefasst für cos:  $10,56 K_1 - 0,51 K_2 = 3$

Lösung des Gleichungssystems:  $K_1 = 0,2834 \quad K_2 = -0,0137$

Damit ist die allg. Lösung:

$$z(x) = e^{-1,6x} ( A \cos(1,3928x) + B \sin(1,3928x) ) + 0,2834 \sin(2,2x) - 0,0137 \cos(2,2x)$$

b) Startwertlösung mit den Startwerten  $z_0 = 3,1$ ,  $z'_0 = -0,45$ ,  $x_0 = 0$ .

$z_0$  und  $x_0$  in allg. Lösung eingesetzt und wegen  $e^0 = 1$ ,  $\cos(0) = 1$ ,  $\sin(0) = 0$  ergibt

$$3,1 = A - 0,0137 \quad \text{oder} \quad A = 3,1137$$

$$z'(x) = -1,6 e^{-1,6x} ( A \cos(\dots) + B \sin(\dots) ) + e^{-1,6x} (-A \sin(\dots) \cdot 1,3928 + B \cos(\dots) \cdot 1,3928) +$$

$0,2834 \cos(\dots) \cdot 2,2 + 0,0137 \sin(\dots) \cdot 2,2$  (Die ... interessieren nicht)  
 $z_0'$  und  $x_0$  eingesetzt in  $z'(x)$  ergibt  $-0,45 = -1,6 \cdot 3,1137 + B \cdot 1,3928 + 0,2834 \cdot 2,2$   
 oder  $B = 2,8062$  und damit die Startwertlösung  
 $z(x) = e^{-1,6x} ( 3,1137 \cos(1,3928 x) + 2,8062 \sin(1,3928 x) ) +$   
 $0,2834 \sin(2,2x) - 0,0137 \sin(2,2x)$

- c) Berechne  $z(2,5)$   $x=2,5$  einsetzen ergibt  $z = -0,2806$  (Vorsicht: Radiant benutzen)  
 d) Skizze: z-Achse nach oben, x-Achse nach rechts, Startpunkt  $z = 3,1$  auf z-Achse  
 einzeichnen, dort kleinen Pfeil schräg nach rechts unten einzeichnen wegen  $z_0' = -0,45$ ,  
 auf der x-Achse Punkt  $x=2,5$  markieren und in Höhe  $z = -0,28$  Punkt einzeichnen.

**Laplace-Transformation:** Eigenschaften, Lösung einer DGL, Korrespondenztabelle, Partialbruchzerlegung, Rücktransformation, Übertragungsfunktion

**28. a)** Mache die Laplace-Transformation (nur in den Bildraum) der DGL

$7\dot{x}(t) + 14x(t) = \cos(4t)$  mit Startwert  $x_0=0$  für  $t=0$ , d.h. bestimme die

Lösungsformel im Bildraum in der Form  $x(p)=\dots$

<b>b) (5 P)</b> Mache die Partialbruchzerlegung des rechts stehenden Bruchs in 2 Brüche, d.h., bestimme A und B	$\frac{6p-9}{p^2-4p+3} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-3}$
---	---

Lösung:

a)  $7(p \cdot x(p) - x_0) + 14x(p) = \frac{p}{p^2+16}$   $x(p) = \frac{p}{(p^2+16)(7p+14)} + \frac{7x_0}{(7p+14)}$

b)  $6p-9 = A(p-3) + B(p-1) \rightarrow 2$  Gleichungen  $A+B=6$  und  $3A+B=9$   
 mit Lösung  $A = 1,5$  und  $B = 4,5$

**29.** Machen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{5p+13}{p^2-p-12} = \frac{5p+13}{(p-4)(p+3)} = \frac{A}{p-4} + \frac{B}{p+3}$$

$$5p+13 = A(p+3) + B(p-4)$$

$$5p+13 = Ap + Bp + 3A - 4B \quad \text{Koeff.vgl:} \quad \begin{cases} A+B=5 \\ 3A-4B=13 \end{cases}$$

Lösung Gls.:  $A=4,71=33/7$   $B=0,286=2/7$

**30.** DGL 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten mit Laplace-Transformation

DGL:  $a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 3 \cdot e^{0,3t}$  mit  $a_2=1,2$ ,  $a_1=6$ ,  $a_0=2,7$ .

Beispiel mit 2 reellen Wurzeln des charakteristischen Polynoms und den Startwerten  $y_0 = 5,2$  und  $\dot{y}_0 = -0,5$ . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung im Zeitbereich mittels Laplace-Transformation (Dieselbe DGL wie Beispiel 25)

Lösung: Transformierte DGL:  $1,2(y(p) - 5,2p + 0,5) + 6(y(p) - 5,2) + 2,7y(p) = 3/(p-0,3)$

oder  $y(p) (1,2p^2 + 6p + 2,7) = 3/(p-0,3) + 6,24p + 30,6$  jetzt div. 1,2

oder  $y(p) (p^2 + 5p + 2,25) = 2,5/(p-0,3) + 5,2p + 25,5$ .

Wegen  $(p^2 + 5p + 2,25) = (p+0,5)(p+4,5)$  und im Zähler ausmultipliziert gibt

$$y(p) = \frac{2,5 + 5,2p(p-0,3) + 25,5(p-0,3)}{(p-0,3)(p^2 + 5p + 2,25)} = \frac{5,2p^2 + 23,94p - 5,15}{(p-0,3)(p+0,5)(p+4,5)}$$

Partialbruchansatz für 3 reelle Einzelnullstellen

$$\frac{5,2p^2 + 23,94p - 5,15}{(p-0,3)(p+0,5)(p+4,5)} = \frac{A}{p-0,3} + \frac{B}{p+0,5} + \frac{C}{p+4,5}$$

oder

$$5,2p^2 + 23,94p - 5,15 = A(p+0,5)(p+4,5) + B(p-0,3)(p+4,5) + C(p-0,3)(p+0,5)$$

Rechte Seite ausmultipliziert gibt

$$5,2p^2 + 23,94p - 5,15 = Ap^2 + 5Ap + 2,25A + Bp^2 + 4,2Bp - 1,35B + Cp^2 + 0,2Cp - 0,15C$$

Koeffizientenvergleich liefert für die Potenzen von p die 3 Gleichungen

$$\begin{array}{lll} p^2: & 1 A + 1 B + 1 C = 5,2 & A = 0,65104 \\ p^1: & 5 A + 4,2 B + 0,2 C = 23,94 & \text{mit den Lösungen } B = 4,94375 \\ p^0: & 2,25 A - 1,35 B - 0,15 C = -5,15 & C = -0,39479 \end{array}$$

Rücktransformation liefert die Zeitfunktion, die auch Aufgabe 25 schon geliefert hat:

$$y(t) = 0,65104 e^{0,3t} + 4,94375 e^{-0,5t} - 0,39479 e^{-4,5t}$$

31. Löse Formel  $z = \sqrt{\frac{x+y}{\pi R^2}} + U_0$  nach x auf.

$$\begin{array}{l} \text{Lösung:} \\ z - U_0 = \sqrt{\frac{x+y}{\pi R^2}} \quad \text{oder} \quad (z - U_0)^2 = \frac{x+y}{\pi R^2} \quad \text{oder} \\ x + y = \pi R^2 (z - U_0)^2 \quad \text{oder} \quad x = \pi R^2 (z - U_0)^2 - y \end{array}$$

## Beispielklausur vom WS 2016/17

### 1. ( 16 P ) Vektoren und Matrizen

a) (3P) Drehe Vektor  $\vec{P} = (-5, 4, 3)$  um  $33^\circ$  um die x-Achse und nenne ihn  $\vec{P}'$

b) (5P) Lösen Sie nach Cramer (mit Determinanten) das 2x2-Gleichungssystem. Machen Sie die Probe.

$$\begin{array}{l} 0,49x + 0,61y = 0,37 \\ 12,5x - 3,9y = 28,9 \end{array}$$

c) (3P) Berechnen Sie die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 > \lambda_2$  der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1,7 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{pmatrix}$

d) (2P) Berechnen Sie das Skalarprodukt  $S = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  der Vektoren  $\mathbf{a} = (3, -5, 7)$  und  $\mathbf{b} = (9, 2, -2)$

e) (3P) Normieren Sie Vektor  $\mathbf{a}$  aus 2d) auf Länge 12 und nennen Sie ihn dann  $\mathbf{a}_{12}$

### 2. ( 15 P ) Gegeben ist die Funktion $z(t, y) = (t^4 - 2y) \sin(2yt)$ ( $t =$ waagrechte Achse)

a) (5P) Die Formeln der partiellen Ableitungen  $z_t$  und  $z_y$

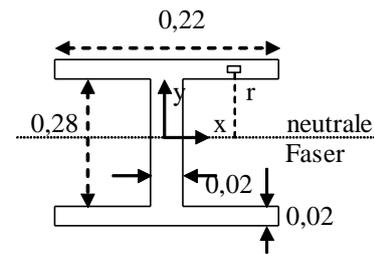
b) (5P) Die Werte von  $z_t$  und  $z_y$  im Punkt  $P(t, y) = (0,8, 1,3)$  und den Gradienten

c) (5P) Welchen Winkel  $\alpha$  bildet der Gradient mit der t-Achse in Grad und in Radiant?

Machen Sie eine Skizze mit Punkt P und dem Gradientenvektor als Pfeil.

**3. ( 8 P ) Balkenbiegung** eines Stahlträgers:

- a) (5P) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment  $\Theta$   
 b) (3P) Berechnen Sie die Durchbiegung  $z$  in [m] und [mm] mit  $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>], Länge  $a = 6$  [m], an beiden Enden aufgelegt und einem mittig aufgehängten Gewicht von 5000 [Kg]. (Falls Sie a) auslassen, rechnen Sie mit  $\Theta = 0,00012$  [m<sup>4</sup>].)



**4. (9 P) Löse mit Trennung der Veränderlichen die DGL  $\dot{x}(t) + 2,2x(t) = 12$ .**

- a) (5P) Bestimme die allgemeine Lösung  $x(t)$   
 b) (2P) Bestimme die freie Konstante  $C$  aus dem Startwert  $x_0 = 75$  bei  $t = 0$   
 c) (2P) Bestimme den Wert von  $x(t)$  der Startwertlösung für  $t = 1$

**5. (17 P) Gegeben ist die DGL  $10 \ddot{x}(t) + 11 \dot{x}(t) + 2,8 x(t) = 12 + 2t$  mit 2 reellen Wurzeln**

- a) (6P) Berechne die allgemeine Lösung  $x(t)$  mittels e-Ansatz  
 b) (5P) Bestimme eine Anfangswertlösung zu  $t = 0$ ,  $x_0 = 12$  und  $\dot{x}_0 = 4$   
 c) (2P) Bestimme den Wert von  $x(t)$  für  $t = 3$ .  
 d) (4P) Machen Sie eine Skizze des Lösungsverlaufs mit Startwerten ( $\dot{x}_0 = 4$  als Pfeil ange- deutet), Kurvenpunkt  $x(3)$  und dem gestrichelten Verlauf der inhomogenen Lösung.

**6. ( 18 P ) Verschiedenes**

- a) (3P) Berechnen Sie Zylinderkoordinaten  $r, \phi, z$  zu den kart. Koordinaten  $x = -5$   $y = -2$   $z = 4$   
 b) (5P) Berechnen Sie nach der verkürzten Formel von Gauß den Fehler  $\sigma_z$  zur Formel  $z = a^2 b^3 / k^{0,4}$  mit  $a = 3,5 \pm 0,1$   $b = 3,7 \pm 0,05$   $k = 2 \pm 0,15$   
 c) (6P) Machen Sie die Partialbruchzerlegung des Bruches  $\frac{8p-2}{(p-4,5)(p+4,8)}$  in zwei Brüche.  
 d) (4P) Stellen Sie die Gleichung  $z = A \sqrt{\frac{\pi R^2}{R-x}} - B$  nach  $x$  um.

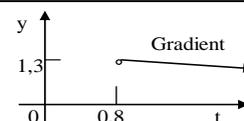
**Lösungen zur Beispielklausur:**

- 1a)  $P' = (-5 \quad 1,721 \quad 4,695)$   
 1b)  $\text{Det} = -9,536$   $x_1 = 2$   $x_2 = -1$  Probe machen !!!  
 1c) Polynom  $\lambda^2 - 2,9 \lambda + 1,88$   $\lambda_1 = 1,922$   $\lambda_2 = 0,978$   
 1d)  $S = 3$   
 1e)  $|a| = 9,11$  Faktor =  $12 / 9,11 = 1,317$   $a_{12} = (3,951 \quad -6,585 \quad 9,219)$

2a)  $z_t = 4t^3 \sin(2yt) + (t^4 - 2y) \cos(2yt) 2y$   $z_y = -2 \sin(2yt) + (t^4 - 2y) \cos(2yt) 2t$

2b)  $z_t = 4,5644$   $z_y = -0,0377$   $\vec{\nabla} z = \begin{pmatrix} 4,5644 \\ -0,0377 \end{pmatrix}$

2c)  $\alpha = \arctan(-0,0377 / 4,5644) = -0,47^\circ$   
 oder  $-0,0082$  Rad



3a)  $\Theta = 2 \left( \int_{x=-0,11}^{0,11} \int_{y=0,14}^{0,16} y^2 dy dx + \int_{x=-0,01}^{0,01} \int_{y=0}^{14} y^2 dy dx \right) = 2(0,0000991 + 0,0000183)$

3b)  $z = -\frac{2500 \cdot 9,81 \cdot 3^3}{1,5 \cdot 10^{11} \cdot 0,0002348 \cdot 3} = -0,0063$  oder  $-6,3$  mm (alternativ  $-17,7$  mm)

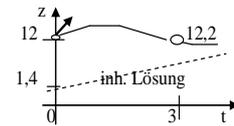
4a)  $x(t) = Ce^{-2,2t} + 5,4545$     b)  $C=69,4545$     c)  $x(1) = 13,16$

5a)  $x_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-0,4t} + C_2 e^{-0,7t}$      $x_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-0,4t} + C_2 e^{-0,7t} + 1,4795 + 0,7143t$

5b)  $x(t) = 35,5e^{-0,4t} - 24,98e^{-0,7t} + 1,4795 + 0,7143t$

5c)  $x(3) = 11,255$

5d)



6a)  $r = 5,385$      $\varphi = \arctan(-2/-5) = 21,8^\circ + 180^\circ = 201,8^\circ$  oder  $3,52$  Rad     $z = 4$

6b)  $z = 470,25$      $\sigma_z = 470,25 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0,1}{3,5}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 0,05}{3,7}\right)^2 + \left(\frac{0,4 \cdot 0,15}{2}\right)^2} = 35,81$

6c)  $\frac{8p-2}{(p-4,5)(p+4,8)} = \frac{3,656}{p-4,5} + \frac{4,344}{p+4,8}$

6d)  $x = -\frac{\pi R^2}{((z+B)/A)^2} - R$

## 9. Literatur

L.Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd. 1 und 2, Vieweg-Verlag  
 bzw. K.Weltner, Mathematik für Physiker, Bd. 1 und 2, Vieweg-Verlag  
 Stöcker, Taschenbuch math. Formeln und moderner Verfahren, Harri Deutsch Verlag  
 A.Makarov, Regelungstechnik und Simulation, Vieweg (speziell LAPLACE-Transformation)